Л.Ю.БЕРЕЗИНА

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ



Л. Ю. БЕРЕЗИНА

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ



МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

74.262
Б 48

Березина Л. Ю.

Б48 Графы и их применение: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1979. — 143 с. с ил.

Книга зиакомит читателя с основами теории графов и ее приложениями. Доступность изложения, сочетание вопросов теории с системой упражиений и иллюстраций дают достаточно полное представление об основных идеях и методах теории графов.

Материал данного пособия может быть использован учителем для внеклассной работы с целью развития у учащихся интереса к предмету.

Б $\frac{60501 - 534}{103(03) - 79}$ 148—79 4306010400

ББК 74.262
51

ОТ АВТОРА

Если вы любите решать задачи на смекалку, логические, олимпиадного типа или головоломки, то, наверное, не раз составляли таблицы, изображали объекты точками, соединяли их отрезками или стрелками, подмечали закономерности у полученных рисунков, выполняли над точками и отрезками операции, не похожие на арифметические, алгебраические или на преобразования в геометрии, то есть вам приходилось строить математический аппарат специально для решения задачи. А это означает, что вы заново открывали для себя начала теории графов.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась именно в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Очень долго она находилась в стороне от главных направлений исследований ученых, была в царстве математики на положении Золушки, чьи дарования раскрылись в полной мере лишь тогда, когда она оказалась в центре общего внимания.

Толчок к развитию теория графов получила на рубеже XIX и XX столетий, когда резко возросло число работ в области топологии и комбинаторики, с которыми ее связывают самые тесные узы родства. Как отдельная математическая дисциплина теория графов была впервые представлена в работе венгерского математика Кёнига в 30-е годы XX столетия.

В последнее время графы и связанные с ними методы исследований органически пронизывают на разных уровнях едва ли не всю современную математику. Графы эффективно используются в теории планирования и управления, теории расписаний, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии, медицине. Широкое применение находят графы в таких областях прикладной математики, как программирование, теория конечных автоматов, электроника, в решении вероятностных и комбинаторных задач. Теория графов быстро развивается, находит все новые приложения и ждет молодых исследователей.

Конечно, в небольшой книге невозможно рассказать о всех направлениях развития теории графов и разработанных приложениях. Главная цель автора в другом — помочь учителю, а значит и школьникам, овладеть основными понятиями теории графов, новыми для школы методами решения задач, в популярной форме познакомить с некоторыми ее приложениями. Материал книги организован так, что знакомство с графами происходит в процессе решения самых разнообразных задач, в формулировках условий которых не упоминаются графы. Для решения их требуется «увидеть» возможность перевести условие на язык графов, решить задачу «внутри теории графов», интерпретировать полученное решение в исходных терминах. Возможность представить граф с помощью наглядных рисунков делает все это более доступным. Вначале приводятся задачи, которые можно решать с помощью неориентированных графов (с одноцветными вершинами и ребрами), потом появляются задачи, для решения которых требуется ввести цветные ребра, и наконец задачи, для решения которых полезны ориентированные графы. Таким образом, расширение понятия «граф» происходит как бы по необходимости, с целью решения очередной задачи. При чтении книги обратите внимание на то, что сначала граф появляется как рисунок из точек и отрезков, соединяющих пары точек. Шаг за шагом выявляются закономерности необычной «геометрии», в которой нет углов, нет расстояния между точками в привычном понимании этого слова, равноправны расположения точек на рисунке, безразлично, соединены ли две точки отрезком прямой или отрезком кривой, и т. д. Постепенно содержание понятия «граф» уточняется, а объем его расширяется. Определение графа появляется лишь в пятой главе книги.

Если в начале книги рассматриваются приложения частного характера, иллюстрирующие теорию графов и ее связь с жизнью, то вторая половина книги посвящена прикладным разделам теории графов, имеющим практическое значение в экономике и управлении.

Конечно, при чтении придется потрудиться, поработать с карандашом и бумагой. Но ведь иначе и быть не может. Это математическая книга, и она требует такой работы. Многое сделано, чтобы облегчить чтение, — материал в каждой главе излагается последовательно от простого к более сложному, от легкого к более трудному. После каждого нового материала приведено большое число упражнений.

Для чтения книги не требуется каких-либо специальных предварительных знаний. Большинство ее разделов можно рекомендовать уже восьмиклассникам; она содержит много материала, интересного для учащихся IX—X классов.

Книга предназначена для индивидуального чтения, но может быть использована и для занятий в классе. Такие занятия проводились в течение пяти лет в школах Москвы и Омска.

Для тех, кто пожелает более основательно познакомиться с теорией графов и ее приложениями, в конце книги приведены списки литературы.

Главы VI, VII, VIII независимы друг от друга; поэтому их можно читать в любом порядке.

Все задачи, рисунки, теоремы и упражнения имеют двойную нумерацию: первое число обозначает номер главы, а второе — их порядковый номер в главе.

Автор выражает искреннюю признательность за полезные предложения по улучшению книги и постоянную поддержку во время работы над ней члену-корреспонденту АПН СССР, доктору педагогических наук, профессору С. И. Шварцбурду; старшему научному сотруднику лаборатории прикладной математики НИИ СиМО АПН СССР И. Л. Никольской; доценту ФИЗТЕХа А. П. Савину; благодарность редакции журнала «Квант», познакомившей широкую школьную читательскую аудиторию с отдельными материалами книги.

ГЛАВА I

ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ГРАФАМИ

§ 1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ГРАФАМ

Задача 1.1. Как вы помните, охотник за мертвыми душами Павел Иванович Чичиков побывал у известных вам помещиков по одному разу у каждого. Он посещал их в следующем порядке: Манилова, Коробочку, Ноздрева, Собакевича, Плюшкина, Тентетникова, генерала Бетрищева, Петуха, Констанжогло, полковника Кошкарева. Найдена схема, на которой Чичиков набросал взаимное расположение имений и проселочных дорог, соединяющих их (рис. 1.1). Установите, какое имение кому принадлежит, если ни по одной из дорог Чичиков не проезжал более одного раза.

Решение. По схеме видно, что путешествие Чичиков начал с имения E, а кончил имением O. Замечаем, что в имения B и C ведут только по две дороги, поэтому по этим дорогам Чичиков должен был проехать. Отметим их жирной линией (рис. 1.2). Определены участки маршрута, проходящие через A: AC и AB. По дорогам AE, AK и AM Чичиков не ездил. Перечеркнем их (рис. 1.2). Отметим жирной линией ED; перечеркнем DK. Перечеркнем MO и MH; отметим жирной линией MF; перечеркнем FO; отметим жирной линией FH, HK и KO (рис. 1.3). Найдем единственно возможный при данном условии маршрут.

Подведем первый итог: задача решена в ходе преобразования картинки. С рисунка 1.3 остается только считать ответ: имение E принадлежит Манилову, D — Коробочке, C — Ноздреву, A — Собакевичу, B — Плюшкину, M — Тентетникову, F — Бетрищеву, H — Петуху, K — Констанжогло, O — Кошкареву.

Задача 1.2. Лист бумаги Плюшкин разрезает на три части. Некоторые из полученных листов он также разрезает на три части. Несколько новых листиков он вновь разрезает на три более мелкие

Рис. 1.1

Рис. 1.2

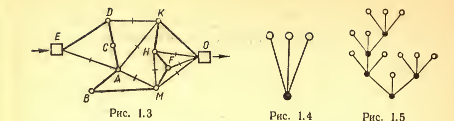


Рис. 1.3 Рис. 1.4 Рис. 1.5

и т. д. Сколько Плюшкин получает листиков бумаги, если разрезает k листов?

Решение. Листы бумаги обозначим на рисунке кружками. Кружки, соответствующие листам, которые разрезаются, закрасим целиком; остальные кружки оставим незакрашенными.

Рисунок 1.4 помогает увидеть, что при разрезании одного листка на три части число листков увеличивается на два (появляются три новых вместо одного). Если же было разрезано k листов, то образовалось $1 + 2k$ листов (рис. 1.5).

На рисунке 1.5 показано пять разрезаний. Сколько в этом случае получено листов?

Кстати, вам не кажется, что схемы на рисунках 1.4 и 1.5 напоминают ветку дерева с листочками? Математики, обратив внимание на это сходство, назвали такие схемы «деревьями».

Задача 1.3. Сколько различных обедов П. И. Чичиков мог насчитать из блюд, выставленных на столе у П. П. Петуха, если бы на каждый обед выбирать только одно холодное блюдо, одно первое, одно второе, одно третье? На столе у П. П. Петуха на этот раз были выставлены из холодных блюд студень с хреном, свежая икра

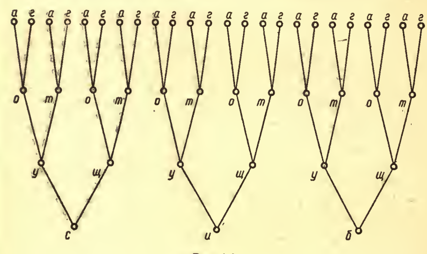


Рис. 1.6

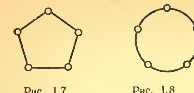


Рис. 1.7 Рис. 1.8

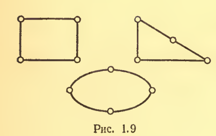


Рис. 1.9

Рис. 1.10

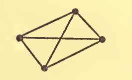


Рис. 1.11

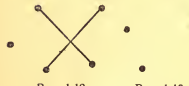


Рис. 1.12 Рис. 1.13

стерляжья, свежепросоленная белужина; на первое — уха из стерлядей, щи с грибами; на второе — осетрина жареная, теленок жареный на вертеле, на третье — арбузы, груши.

Р е ш е н и е. Каждое блюдо изобразим кружком, а соответствие блюд одного обеда — отрезками, соединяющими кружки. Каждый кружок обозначим первой буквой названия блюда. Возникает схема, изображенная на рисунке 1.6. А теперь ответьте на вопрос задачи. Схема помогает сосчитать число возможностей. Она же поможет узнать, сколько различных обедов можно составить, например, с икрой; сколько различных обедов с арбузом.

Полученная схема немного сложней, чем схема на рисунке 1.5. Она состоит из трех деревьев. Такую схему называют «лесом».

З а д а ч а 1.4. Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими. Возможна ли такая компания?

Р е ш е н и е. Каждого из этой компании изобразим на рисунке кружком. Если двое знакомы, соединим соответствующие кружки отрезком. Оказывается, что такие ситуации не только возможны, но все их можно описать аналогичными схемами (рис. 1.7). Из рассматриваемой компании нельзя выделить ни «четырехугольник», ни «треугольник», поскольку тогда из оставшихся нельзя будет составить компанию, удовлетворяющую условию, т. е. схема знакомства единственная. Всякую схему, напоминающую мно-

гоугольник, принято называть циклом. (Древние греки «цикл» называли «колесом»; и действительно, на рисунке 1.8 изображено нечто, напоминающее колесо и с успехом заменяющее в рассматриваемой ситуации многоугольник.)

Что общего у схем, которые помогли нам решить задачи? Все они состоят из точек (кружков) и отрезков, соединяющих пары точек. Рассмотрение таких схем и приводит к понятию графа.

Граф представляет собой непустое множество точек и множество отрезков, оба конца которых принадлежат заданному множеству точек. Обозначать граф будем буквой Г.

При изображении графов на рисунках или схемах отрезки могут быть прямолинейными или криволинейными; длины отрезков и расположение точек произвольны.

Все три фигуры на рисунке 1.9 изображают один и тот же граф.

С позиции теории графов нет различий между «мышкой» и «слоном» на рисунке 1.10.

Точки иначе называют *вершинами*, отрезки — *ребрами графа*. Вершины графа на рисунке выделяют обычно кружками или квадратиками хотя бы потому, что не всегда точки пересечения ребер принимаются за вершины графа. Например, по условию на рисунке 1.11 точка пересечения «диагоналей четырехугольника» вершиной не является.

Примеры

1. На рисунке 1.11 изображен граф с четырьмя вершинами и шестью ребрами.

2. На рисунке 1.12 изображен граф с пятью вершинами и двумя ребрами.

3. На рисунке 1.13 изображен граф с тремя вершинами, не имеющий ни одного ребра.

Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру, называются *изолированными*.

Граф, изображенный на рисунке 1.12, имеет одну изолированную вершину, а в графе, изображенном на рисунке 1.13, все три вершины изолированные.

Обозначать вершины будем обычно заглавными буквами русского или латинского алфавитов (A, B, C, ..., X, Y, ...) и иногда числами. Ребра графа будем обозначать парами вершин, например (A, B), (1, 5) и т. п., или малыми буквами русского или латинского алфавитов (a, b, c, ..., x, y, ...).

Иногда мы будем изображать граф, не обозначая буквами его ребра и вершины.

Примерами графов могут служить схема метрополитена, схемы железных или шоссейных дорог, структурные формулы молекул, планы выставок и т. д., словом, схемы и планы (или карты) без указания масштабов, показывающие лишь связи между принадлежащими им объектами.

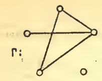


Рис. 1.14



Рис. 1.15

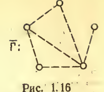


Рис. 1.16

Поскольку графы изображаются особыми рисунками, то при чтении книги придется немного рисовать. Сначала будем рисовать на бумаге, а позже рисунки графов можно будет представлять уже мысленно.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1. ПОЛНЫЙ ГРАФ. ДОПОЛНЕНИЕ ГРАФА

Граф называется полным, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром (рис. 1.11).

В полном графе каждая его вершина принадлежит одному и тому же числу ребер. (Почему?) Для задания полного графа достаточно знать число его вершин.

Упражнения

1.1. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если
а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 5$.

1.2. Скольким ребрам принадлежит вершина в полном графе с n вершинами, если
а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = k$?

1.3. Сколько ребер в полном графе с n вершинами, если
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$?

1.4. Существует ли полный граф с семью ребрами?

1.5. Докажите, что в полном графе с n вершинами $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

1.6. Сколько ребер следует добавить к графу, изображенному на рисунке 1.7, для того чтобы он стал полным?

Граф, не являющийся полным, можно преобразовать в полный с теми же вершинами, добавив недостающие ребра. Например, граф Г на рисунке 1.14 неполный. Проведя недостающие ребра (для удобства их можно выделить другим цветом или другим типом линии), получаем полный граф с пятью вершинами (рис. 1.15).

Вершины графа Г и ребра, которые добавлены, тоже образуют граф. Он приведен на рисунке 1.16. Такой граф называют дополнением графа Г и обозначают его $\overline{\Gamma}$.

Дополнением графа Г называется граф $\overline{\Gamma}$ с теми же вершинами, что и граф Г, и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу Г, чтобы получился полный граф.

Упражнения

1.7. Нарисуйте граф $\overline{\Gamma}$, являющийся дополнением графа Г, изображенного на рисунке 1.17.

1.8. У графа Г четыре вершины; A — одна из его вершин; $\overline{\Gamma}$ — дополнение графа Г. Скольким ребрам принадлежит вершина A в графе $\overline{\Gamma}$, если в графе Г эта вершина:

а) принадлежит одному ребру;
б) принадлежит трем ребрам;
в) не принадлежит ни одному ребру?

Является ли граф полным или нет, это его характеристика в целом. Рассмотрим теперь характеристики его вершин.

2. СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ

Вершины в графе могут отличаться друг от друга тем, скольким ребрам они принадлежат.

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина.

Обозначать степени вершин A, B, C будем соответственно так: степ. A, степ. B, степ. C и т. п.

У графа на рисунке 1.17 (а): степ. $A = 1$; степ. $B = 2$. У графа на рисунке 1.17 (в) степени всех вершин равны нулю.

Вершина называется *нечетной*, если ее степень — число нечетное. Вершина называется *четной*, если ее степень — число четное.

Имея даже общие представления о графе, иногда можно судить о степенях его вершин. Так, степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин. При этом некоторые закономерности, связанные со степенями вершин, присущи не только полным графам.

З а д а ч а 1.5. Участники пионерского слета, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Докажите, что

а) всего было передано четное число конвертов;

б) число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четное.

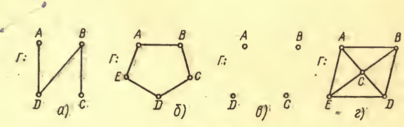


Рис. 1.17

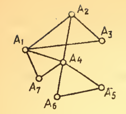


Рис. 1.18

Решение. Пусть участники слета A_1, A_2, A_3, ..., A_n — вершины графа, а ребра соединяют на рисунке 1.18 пары вершин, изображающих ребят, обменявшихся конвертами:

а) степень каждой вершины A_i показывает число конвертов, которые передал участник A_i своим знакомым. Общее число переданных конвертов N равно сумме степеней всех вершин графа. $N =$ степ. A_1+степ. $A_2+\ldots+$степ. $A_{n-1}+$ + степ. A_n, но $N = 2p$, где p — число ребер графа, то есть N — четное. Следовательно, было передано четное число конвертов;

б) в равенстве $N =$ степ. $A_1 +$ степ. $A_2 + \ldots +$ степ. $A_{n-1} +$ + степ. A_n сумма нечетных слагаемых должна быть четной, а это может быть только в том случае, если число нечетных слагаемых четно. А это означает, что число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четное.

В ходе решения задачи 1.5 доказаны две теоремы.

Теорема 1.1. *В графе Г сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа.*

$$\sum_{i=1}^{n} \text{степ. } A_i = \text{степ. } A_1 + \text{степ. } A_2 + \ldots + \text{степ. } A_n = 2p,$$

где p — число ребер графа Г, n — число его вершин.

Теорема 1.2. *Число нечетных вершин любого графа четно.*

Можно обнаружить и другие интересные свойства графов.

Рассмотрим сначала графы с пятью ребрами. Степень любой вершины такого графа принимает одно из значений: 4, 3, 2, 1, 0.

Упражнения

1.9. Найдется ли граф с пятью вершинами, у которого одна вершина изолированная, а другая — степени 4?

1.10. Найдется ли граф с пятью вершинами, степени которых все различны между собой, т. е. равны 0, 1, 2, 3, 4?

1.11. Нарисуйте граф Г с пятью вершинами, у которого ровно две вершины имеют одинаковую степень.

1.12. Сколько вершин с одинаковыми степенями имеет дополнение графа Г, если граф Г имеет в точности 2 вершины с одинаковыми степенями?

1.13. Если в графе с пятью вершинами ровно две вершины имеют одинаковую степень, то могут ли они быть обе изолированными или обе иметь степень 4?

Решив эти упражнения, легче разобраться в следующей задаче.

Задача 1.6. Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым из остальных по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

Решение. Переведем условие задачи на язык графов. Каждому из шахматистов поставим в соответствие вершину графа, соединим ребрами попарно вершины, соответствующие шахматистам,

уже сыгравшим между собой партию. Получим граф с девятью вершинами. Степени его вершин равняются числу партий, сыгранных соответствующими игроками. Покажем, что во всяком графе с девятью вершинами всегда найдутся хотя бы две вершины одинаковой степени.

Каждая вершина графа с девятью вершинами может иметь степень, равную 0, 1, 2, ..., 7, 8. Предположим, что существует граф Г, все вершины которого имеют разную степень, т. е. каждое из чисел последовательности 0, 1, 2, ..., 7, 8 является степенью одной и только одной из его вершин. Но этого не может быть. Действительно, если в графе есть вершина A степени 0, то в нем не найдется вершина B со степенью 8, так как эта вершина B должна быть соединена ребрами со всеми остальными вершинами графа, в том числе и с A. Иначе говоря, в графе с девятью вершинами не могут быть одновременно вершины степени 0 и 8. Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, степени которых равны между собой.

Вернемся к задаче. Доказано, что в любой момент найдутся хотя бы двое, сыгравшие одинаковое число партий.

Решение этой задачи почти дословно повторяется в ходе доказательства следующей теоремы (только число 9 приходится заменить произвольным натуральным числом $n \geqslant 2$).

Теорема 1.3. *Во всяком графе с n вершинами, где $n \geqslant 2$, всегда найдутся по меньшей мере две вершины с одинаковыми степенями.*

Решим еще одну задачу, связанную со степенями вершин.

Задача 1.7. Девять человек проводят шахматный турнир в один круг. К некоторому моменту выясняется, что в точности двое сыграли одинаковое число партий. Докажите, что тогда либо в точности один участник еще не сыграл ни одной партии, либо в точности один сыграл все партии.

Решение. Условие задачи переведем на язык графов. Пусть вершины графа — игроки, а каждое ребро означает, что соответствующие игроки уже сыграли между собой партию. Из условия известно, что в точности две вершины имеют одинаковые степени. Требуется доказать, что в таком графе всегда найдется либо только одна изолированная вершина, либо только одна вершина степени 8.

В общем случае у графа с девятью вершинами степень каждой вершины может принимать одно из девяти значений: 0, 1, 2, ..., 7, 8. Но у такого графа степени вершин принимают только восемь разных значений, ибо ровно две вершины имеют одинаковую степень. Следовательно, обязательно либо 0, либо 8 будет значением степени одной из вершин.

Докажем, что в графах с девятью вершинами, из которых в точности две имеют одинаковую степень, не может быть двух вершин степени 0 или двух вершин степени 8.

Допустим, что все же найдется граф с девятью вершинами, в котором ровно две вершины изолированные, а все остальные имеют

разные между собой степени. Тогда, если не рассматривать эти две изолированные вершины, останется граф с семью вершинами, степени которых не совпадают. Но такого графа не существует (см. теорему 1.3). Значит, это предположение неверное.

Теперь допустим, что существует граф с девятью вершинами, в котором ровно две вершины имеют степень 8, а все остальные — несовпадающие степени. Тогда в дополнении данного графа ровно две вершины будут иметь степень 0, а остальные попарно различные степени. Этого тоже не может быть (теорема 1.3), т. е. и второе предположение неверное.

Следовательно, у графа с девятью вершинами, из которых в точности две имеют одинаковую степень, всегда найдется либо одна изолированная вершина, либо одна вершина степени 8.

Вернемся к задаче. Как и требовалось доказать, среди рассмотренных девяти игроков либо только один еще не сыграл ни одной партии, либо только один сыграл уже все партии.

При решении этой задачи число 9 можно было заменить любым другим натуральным числом $n > 2$.

Это решение поможет вам провести доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.4. *Если в графе с n вершинами ($n > 2$) в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n - 1$.*

Упражнения

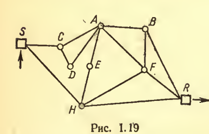


Рис. 1.19

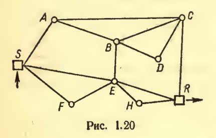


Рис. 1.20

1.14. В бюро по туризму составляются маршруты путешествий для автотуристов, которые должны проехать из пункта S в пункт R и по пути осмотреть все местные достопримечательности. Пункты и все шоссейные дороги, соединяющие их между собой, представлены схемой (рис. 1.19). Помогите бюро составить такой маршрут, чтобы туристы в каждый из указанных пунктов попадали не более одного раза. Существует ли хотя бы один такой маршрут? Сколько может быть при данной схеме дорог? Выпишите последовательность пунктов для каждого найденного маршрута.

1.15. Условие то же, что в упражнении 1.14, но схема задается рисунком 1.20.

1.16. Условие то же, что в упражнении 1.14. Соответствующая схема задается рисунком 1.21.

1.17. Автотуристы, проезжая из города S в город R, решили по пути осмотреть все достопримечательные места, указанные на рисунке 1.22. Помогите им составить такой маршрут,

чтобы в каждый отмеченный пункт туристы попадали не более одного раза. Сколько таких маршрутов может быть при данной схеме дорог?

1.18. Имеются три листа бумаги; некоторые из них разрезаются на 3 части, несколько новых кусков — на 3 более мелкие части и т. д. Сколько всего получится листков, если всего разрезано было k листков?

1.19. Сколько получится листков бумаги, если первоначально было m листов, некоторые листы разрезали на 5 частей, а всего было разрезано k листов?

1.20. Сколько получится кусков бумаги, если первоначально имелось m кусков, некоторые из кусков разрезаны на n частей, а всего было разрезано k кусков?

1.21. Имеется 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 частей. Некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 5 частей и т. д. Проделав так несколько раз, подсчитали число получившихся листков. Докажите, что в результате не мог получиться семьдесят один лист.

1.22. Имеется k ящиков, в некоторых из них еще k ящиков; в некоторых из последних — снова k ящиков. Сколько всего ящиков, если заполненных m?

1.23. Составьте множество двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр: 1, 2, 3. Сколько таких чисел?

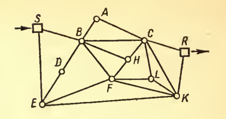


Рис. 1.21

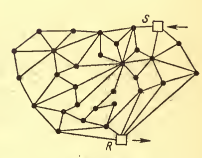


Рис. 1.22

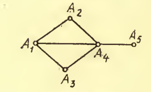


Рис. 1.23

1.24. Составьте множество трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 2 и 5. Сколько таких чисел?

1.25. Составьте множество четырехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 7 и 9. Сколько таких чисел?

1.26. Семеро школьников, разъезжаясь на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться, что каждый получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

1.27. Проведите доказательство теоремы 1.2.

1.28. В футбольном турнире участвуют 29 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей (быть может, ни одного).

1.29. Существует ли граф с шестью вершинами, степени которых 2, 3, 3, 4, 4, 4?

1.30. Проведите доказательство теоремы 1.3.

1.31. 30 команд участвуют в первенстве по футболу. Каждые две команды должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязания найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

1.32. Проведите доказательство теоремы 1.4.

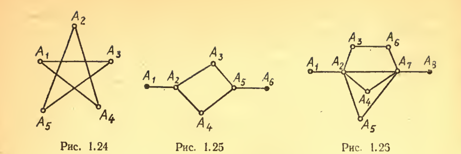


Рис. 1.24 Рис. 1.25 Рис. 1.26

3. ПУТЬ В ГРАФЕ. ЦИКЛ

Как пройти по ребрам на рисунке 1.23 из A_1 в A_5?

Вот три последовательности ребер, следуя которым можно попасть из A_1 в A_5:

1. (A_1, A_4); (A_4, A_5).
2. (A_1, A_2); (A_2, A_4); (A_4, A_5).
3. (A_1, A_4); (A_4, A_2); (A_2, A_1); (A_1, A_4); (A_4, A_5).

В одних — ребра повторяются, в других — не повторяются. Можно указать маршрут от A_1 до A_5, содержащий все вершины графа. Таков, например, маршрут: (A_1, A_2); (A_2, A_4); (A_4, A_3); (A_3, A_1); (A_1, A_4); (A_4, A_5). Но не всякую последовательность ребер, ведущих из A_1 в A_5, называют путем из A_1 в A_5.

Путем от A_1 до A_n в графе называется такая последовательность ребер, ведущая от A_1 к A_n, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Вершина A_1 — начало пути, вершина A_n — конец.

Из определения следует, что последовательность ребер (A_1, A_4); (A_4, A_2); (A_2, A_1); (A_1, A_4); (A_4, A_5) не является путем в графе.

Заметим, что согласно определению вершины пути могут повторяться, т. е. путь может быть самопересекающимся.

Путь от A_1 до A_n называется *простым*, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Упражнения

1.33. Найдите два пути, связывающие вершины A_1 и A_3 в графе (рис. 1.24).

1.34. На рисунке 1.25 изображен граф Г. Назовите один из путей от A_1 до A_6. Существует ли путь от A_1 до A_6, проходящий через все вершины графа?

1.35. Найдется ли путь в графе Г от A_1 до A_8, содержащий все вершины графа (рис. 1.26)?

1.36. Существует ли простой путь от A_1 до A_5, проходящий через все вершины графа (рис. 1.23)?

Теперь мы можем дать определение цикла. Термин этот уже встречался при решении задачи 1.4.

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

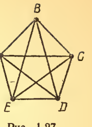


Рис. 1.27

Упражнения

1.37. Найдите в графе (рис. 1.27) циклы, содержащие:
а) 4 ребра; в) 5 ребер;
б) 6 ребер; г) 10 ребер.
Какие из этих циклов простые?

1.38. Изобразите простой цикл с шестью вершинами и подсчитайте, сколько у него ребер. А из скольких ребер состоит простой цикл, если у него 10 вершин? Если 15 вершин?

1.39. Каково наименьшее число ребер в простом цикле?

1.40. Сколько ребер в простом цикле с b ($b \geqslant 3$) вершинами?

1.41. Сколько ребер в простом пути с b вершинами?

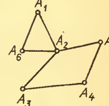
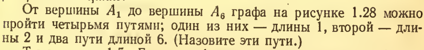


Рис. 1.28

Длиной пути называется число ребер этого пути.

Аналогично *длиной цикла называется число ребер в этом цикле.*



От вершины A_1 до вершины A_6 графа на рисунке 1.28 можно пройти четырьмя путями; один из них — длины 1, второй — длины 2 и два пути длиной 6. (Назовите эти пути.)

Теорема 1.5. *Если у графа все простые циклы четной длины, то граф не имеет ни одного цикла нечетной длины.*

Доказательство. Для графа, являющегося простым циклом, утверждение теоремы очевидно. Допустим, что у графа, все простые циклы которого четной длины, все же найдется цикл нечетной длины. Во всяком непростом цикле существует вершина, через которую путь проходит более одного раза. В такой вершине цикл разобьется на два, причем один из них, очевидно, будет иметь нечетную длину, а другой — четную. Будем продолжать расчленение нечетного цикла до тех пор, пока не дойдем до простых циклов. Хотя бы один из них обязательно должен иметь нечетную длину. Существование такого простого цикла противоречило бы условию. Следовательно, принятое предположение неверно.

Введение понятия «путь» подвело нас к важному в математике понятию «связность».

4. СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Решим задачу, аналогичную задаче 1.4.

Задача 1.8. Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими?

Решение. Участника этой компании изобразим вершиной графа, а отношение знакомства между двумя участниками —

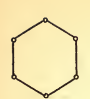


Рис. 1.29

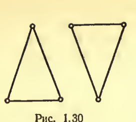


Рис. 1.30

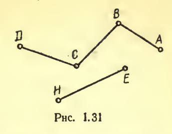


Рис. 1.31

ребром. Изобразим графы, которые могут соответствовать такой компании (рис. 1.29 и 1.30).

Итак, ситуация, рассмотренная в задаче, вполне возможна. Но случай, рассмотренный на рисунке 1.30, соответствует не одной, а двум компаниям, участники одной из них не знакомы с участниками другой.

Про граф, изображенный на рисунке 1.29, говорят, что он связный, так как из каждой вершины по ребрам можно попасть в любую другую. Делаем вывод, что в этом случае каждый через своих знакомых может познакомиться со всеми остальными.

Во втором случае получились два простых цикла, не сцепленные между собой в вершинах. Такой граф называется несвязным.

Дадим теперь определения связности вершин в графе и связности графа.

Две вершины A и B графа называются связными, если в графе существует путь с концами A и B.

Две вершины графа называются несвязными, если в графе не существует ни одного пути, связывающего их.

Пример. В графе Г (рис. 1.31) вершины A и B — связные, а вершины A и H — несвязные.

Граф называется связным, если каждые две вершины его связные.

Граф называется несвязным, если хотя бы две вершины его несвязные.

Пример. Графы на рисунках 1.28 и 1.29 связные. Графы на рисунках 1.30 и 1.31 связными не являются.

Упражнения

1.42. Нарисуйте граф с пятью вершинами, который не является связным.

1.43. «Дорисуйте» граф, изображенный на рисунке 1.31, так, чтобы он оказался связным.

1.44. Назовите пути наименьшей и наибольшей длины от вершины A_1 до вершин A_2 и A_7 в графе на рисунке 1.26.

Теорема 1.6. *Связный граф представляет собой простой цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет степень 2.*

Прямая теорема. *Если Г — связный граф и степень каждой его вершины равна 2, тогда Г — простой цикл.*

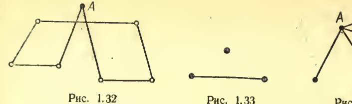


Рис. 1.32 Рис. 1.33



Рис. 1.34

Доказательство. Из каждой вершины данного графа в любую другую ведет путь. Начнем путь из какой-нибудь вершины A и пройдем по одному из двух ребер, которым принадлежит эта вершина. Попав во вторую вершину, выйдем из нее по второму ребру и т. д. С необходимостью все ребра графа будут пройдены, и мы вернемся в исходную вершину A (рис. 1.32). Путь замкнется.

Обратная теорема. *Если граф Г — простой цикл, тогда степень каждой его вершины равна двум.*

Доказательство. Так как граф Г — замкнутый простой путь, то из каждой его вершины можно попасть в любую другую, не проходя ни через какую вершину более одного раза. Степень каждой вершины такого графа равна двум.

Покажем, что в простом цикле не может быть вершины, степень которой не равна двум.

Если какая-то вершина в графе имеет степень меньше двух, то она не принадлежит никакому простому циклу (рис. 1.33).

Если какая-то вершина имеет степень больше двух, то никакой простой цикл (по определению) не может содержать все ребра, которым принадлежит эта вершина (рис. 1.34).

5. ОПЕРАЦИЯ УДАЛЕНИЯ РЕБРА. МОСТ

Важные закономерности, свойственные графам, обнаруживаются при удалении из них ребер.

При *удалении ребра* (A, B) из графа Г получается граф с теми же вершинами, что и граф Г, и всеми ребрами, кроме ребра (A, B).

Пример осуществления операции удаления ребра (A, B) из графа показан на рисунке 1.35.

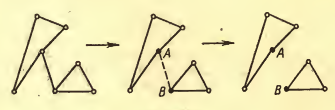


Рис. 1.35

При удалении ребра из связного графа новый граф может оказаться как связным, так и несвязным. Приведите примеры.

Ребро (A, B) называется мостом графа Г, если в графе, полученном после удаления из Г ребра (A, B), вершины A и B оказываются несвязными. На рисунке 1.35 мост (A, B) выделен штриховой линией.

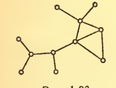


Рис. 1.36

Упражнение

1.45. Выделите в графе красным цветом ребра (рис. 1.36), которые являются мостами.

Существуют несколько признаков мостов. Известно, что признак какого-то объекта может заменить его определение, т. е. по признаку можно распознать объект. Рассмотрим признаки мостов.

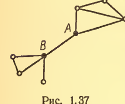


Рис. 1.37

1. Ребро (A, B) является мостом в том и только в том случае, если (A, B) — единственный путь, соединяющий вершины A и B (рис. 1.37).

2. Ребро (A, B) является мостом в том и только в том случае, если найдутся две вершины C_1 и C_2 такие, что каждый путь, соединяющий их, содержит A и B (рис. 1.38).

3. Ребро (A, B) является мостом в том и только в том случае, если оно не принадлежит ни одному циклу (рис. 1.37 и 1.39).

Докажем справедливость третьего признака.

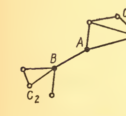


Рис. 1.38

Прямая теорема. *Если ребро (A, B) не принадлежит ни одному циклу, то (A, B) — мост.*

Так как ребро (A, B) не принадлежит ни одному циклу, то при его удалении не останется пути, связывающего A и B, т. е. (A, B) является мостом (рис. 1.37).

Обратная теорема. *Если ребро (A, B) — мост, то (A, B) не принадлежит ни одному циклу.*

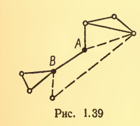


Рис. 1.39

Если бы ребро (A, B) принадлежало циклу (рис. 1.39), то при удалении ребра (A, B) остался бы второй путь, связывающий A и B (на рисунке 1.39 он выделен штриховой линией), т. е. ребро (A, B) не было бы мостом. Следовательно, (A, B) не принадлежит циклу.

Доказательство признаков 1 и 2 проведите самостоятельно; вам помогут рисунки 1.37 и 1.38.

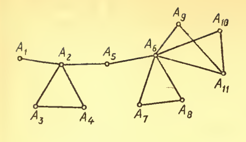


Рис. 1.40

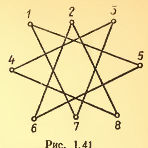


Рис. 1.41

Упражнения

1.46. На рисунке 1.40 изображен граф Г.

а) Найдите путь в Г от A_1 до A_{11}, содержащий все вершины графа Г.

б) Найдите маршрут обхода всех вершин графа Г из A_1 в A_{11}, не являющийся путем.

в) Существует ли в графе Г простой путь от A_1 до A_{11}, проходящий через все вершины графа Г?

г) Сколько граф Г содержит:

1) циклов?

2) простых циклов?

3) мостов?

1.47. На рисунке 1.41 изображен граф Г:

а) Найдите пути, связывающие вершины 1 и 3.

б) Является ли граф Г связным?

в) Найдутся ли в графе Г циклы из трех, четырех, пяти, шести ребер?

г) Имеются ли в графе Г простые циклы? Если да, то из скольких ребер они состоят. Укажите их.

1.48. Можно ли из полного графа с 17 вершинами удалить некоторые ребра так, чтобы степень каждой вершины равнялась пяти?

§ 3. ДЕРЕВЬЯ. ЛЕС

Прежде чем переходить к новой теме, выполните упражнения.

Упражнения

1.49. Нарисуйте граф с семью вершинами и шестью ребрами, не имеющий ни одного цикла.

1.50. Нарисуйте связный граф с семью вершинами и шестью ребрами.

1.51. Нарисуйте граф с семью вершинами, в котором для любых двух вершин существует один и только один связывающий их путь.

1.52. Постройте связный граф с семью вершинами, каждое ребро которого — мост.

Рассмотрим внимательно рисунки, которые строили при решении задач 1.49—1.52. Что характерно для всех построенных графов? Во-первых, они связные; во-вторых, они не содержат циклов. Такие графы выделяются в отдельный класс, представители которого именуются деревьями.



Рис. 1.42 Рис. 1.43 Рис. 1.44

Напомним, что термин «дерево» встречался нам при решении задач 1.2 и 1.3.

Деревом называется всякий связный граф, не имеющий циклов (рис. 1.42).

Удобно считать (удобство это скажется, в частности, при доказательстве теоремы 1.7), что граф, состоящий из одной изолированной вершины, тоже является деревом.

Для каждой пары вершин дерева существует единственный соединяющий их путь.

Вершина дерева, степень которой равна единице, называется *висячей вершиной* (на рисунке 1.42 висячие вершины выделены закрашенными кружками).

Лесом называется несвязный граф, представляющий объединение деревьев (рис. 1.43 и 1.44). Напоминаем, что термин «лес» встречался при решении задачи 1.3.

Всякое ребро в дереве (и в лесе) является мостом (признак 3).

Постройте какое-нибудь дерево с пятью вершинами и подсчитайте число ребер в полученном графе. Оказывается, что в любом дереве с пятью вершинами всегда будет четыре ребра.

Теорема 1.7. *Дерево с в вершинами имеет в — 1 ребро.*

Для того чтобы из одного дерева Г, не являющегося изолированной вершиной, получить два дерева с теми же вершинами, необходимо удалить из Г одно ребро. Для образования трех деревьев необходимо удалить из Г два каких-нибудь ребра. Самое большее из дерева Г с в вершинами можно получить в деревьев, каждое из которых является изолированной вершиной. Для этого необходимо удалить в — 1 ребро из дерева Г. Итак, действительно, в дереве с в вершинами в — 1 ребро.

Упражнения

1.53. Какое максимальное число висячих вершин может иметь дерево, обладающее 9 вершинами? Какое минимальное число висячих вершин оно может иметь? Сделайте рисунки таких деревьев.

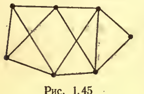


Рис. 1.45

1.54. Докажите, что лес, состоящий из k деревьев и содержащий в вершин, имеет в—k ребер.

1.55. Из графа Г (рис. 1.45) удалите часть ребер так, чтобы новый граф был деревом, содержащим все вершины графа Г.

1.56. Сколько ребер надо удалить из связного графа, имеющего p ребер и в вершин, чтобы получить дерево, содержащее все вершины этого графа?

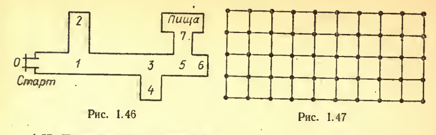


Рис. 1.46

Рис. 1.47

1.57. Приведите пример графа, из которого нельзя выделить дерево, содержащее все вершины графа.

1.58. Проводится эксперимент, при котором морскую свинку пускают в лабиринт (рис. 1.46). Сколькими способами она может попасть к пище, если она ни в один тупик не заходит более одного раза, причем, попав в тупик, возвращается на перекресток, с которого свернула в этот тупик. Нарисуйте дерево всевозможных маршрутов морской свинки к пище. Какова длина самого короткого маршрута к пище, самого длинного?

1.59. Задан граф, изображенный на рисунке 1.47. Какое наибольшее число ребер можно удалить, чтобы граф остался связным?

Кубок по настольному теннису разыгрывается по олимпийской системе. Встречи проводятся без ничьих. К очередному туру допускается только победившая в предыдущем туре команда. Проигравшие выбывают из игры. Для завоевания кубка команда должна победить во всех турах.

На участие в розыгрыше кубка подаиы заявки от 16 команд. Схема проведения игр изображается графом на рисунке 1.48.

Вершины нижнего «яруса» дерева (закрашенные) интерпретируем как команды, участвующие в розыгрыше кубка, вершины второго снизу яруса — как команды-победительницы в $\frac{1}{16}$ финала, вершины третьего яруса — как команды-победительницы в $\frac{1}{8}$ финала и т. д.

Какую информацию можно получить с помощью этого дерева? Непосредственно с него считываются:

1) число всех участников розыгрыша кубка (число закрашенных вершин);

2) число этапов проведения розыгрыша (число «ярусов» из вершин в дереве, не считая нижнего);

3) число команд, участвующих в $\frac{1}{8}$ финала, в $\frac{1}{4}$ финала, в $\frac{1}{2}$ финала (число вершин соответственно в четвертом сверху ярусе, в третьем сверху ярусе, во втором сверху ярусе);

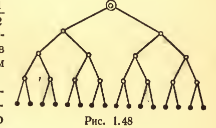


Рис. 1.48

4) число матчей, которые придется сыграть командам для выявления обладателя кубка (число

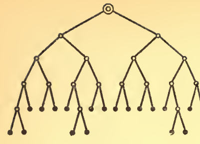
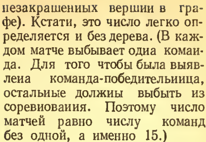


Рис. 1.49


незакрашениых вершии в графе). Кстати, это число легко определяется и без дерева. (В каждом матче выбывает одиа комаида. Для того чтобы была выявлеиа команда-победительиица, остальиые должиы выбыть из соревиоваиия. Поэтому число матчей равно числу команд без одной, а именно 15.)

Упражнения

1.60. Если в розыгрыше кубка по олимпийской системе участвуют 19 комаид, то схема проведення розыгрыша может быть такой, как иа рисуике 1.49. Шестн командам, выбраиным по жеребьевке, придется провести дополнительиые встречи.

Объясиите: 1) Что характеризует число висячих вершин?

2) Что обозиачают ие висячие вершины?

3) Сколько матчей иеобходнмо провестн для выявления победнтеля?

1.61. Сколько матчей иеобходимо провести для того, чтобы выявить по олимпийской системе обладателя кубка среди 147 комаид?

а) б) в)

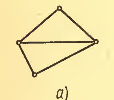
Рис. 1.50

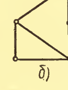
§ 4. ИЗОБРАЖЕНИЕ ГРАФА

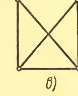
Одии и тот же граф может выглядеть на рисуиках по-разиому. Например, на трех рисунках 1.50 (а), (б), (в), мало похожих друг иа друга, изображен один и тот же граф (полиый граф с четырьмя вершинами).

Упражненне

1.62. Объясните, почему ие являются изображениями одного и того же графа:
1) рисуики 1.51 (а) и 1.51 (б);
2) рисуики 1.51 (в) и 1.51 (г);
3) рисуики 1.52 (а) и 1.52 (б);
4) рисуики 1.25 (в) и 1.52 (г).


а)


б)


в)

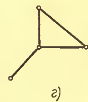

г)

Рис. 1.51

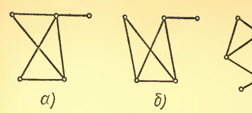
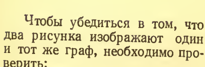


Рис. 1.52



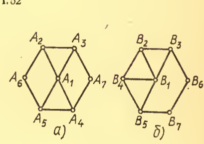


Рис. 1.53

Чтобы убедиться в том, что два рисунка изображают один и тот же граф, необходимо проверить:

1. Одинаковое ли число вершин на обоих рисунках?
2. Одинаковое ли на них число ребер?
3. Одинаковое ли на них число вершин имеет степень k?

Но выполнение перечисленных трех условий еще не достаточно для того, чтобы два рисунка изображали один и тот же граф. Действительно, на рисунках 1.53 (а) и 1.53 (б) изображены графы, имеющие по 7 вершин, по 10 ребер, причем по одной вершине степени 4, по четыре вершины степени 3, по две вершины степени 2. Но эти рисунки изображают разные графы, так как если на рисунке 1.53 (б) вершины степени 2 (B_6 и B_7) соединены между собой ребром, то на рисунке 1.53 (а) вершины степени 2 (A_6 и A_7) ребром не соединены.

Сформулируем необходимое и достаточное условие соответствия двух рисунков одному и тому же графу. Они изображают один и тот же граф тогда и только тогда, когда между вершинами на первом и на втором рисунках существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором:

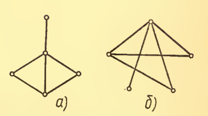


Рис. 1.54

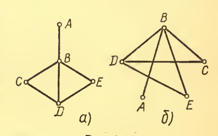


Рис. 1.55

1) две вершины графа на первом рисунке соединены ребром, если соединена ребром соответствующая пара вершин графа на втором рисунке;

2) две вершины графа на втором рисунке соединены ребром, если соединена ребром соответствующая пара вершин графа на первом рисунке.

Докажем, что на рисунках 1.54 (а) и 1.54 (б) изображен один и тот же граф.

Заметим, что на этих рисунках приводятся графы с одинаковым числом вершин, одинаковым числом ребер; на каждом из них — по одной вершине степени 4, по одной вершине степени 3, по две вершины степени 2 и по одной вершине степени 1. Установим взаимно однозначное соответствие между их вершинами. Вершины, которые поставим во взаимно однозначное соответствие, обозначим одинаковыми буквами (рис. 1.55).

При этом соответствии вершины, одинаково обозначенные, имеют одинаковые степени, и если какие-то две вершины на рисунке 1.55 (а) соединены ребром, то и на рисунке 1.55 (б) соответствующие им вершины тоже соединены ребром. Кроме этого, если какие-то две вершины на рисунке 1.55 (б) соединены ребром, то и соответствующие им вершины на рисунке 1.55 (а) тоже соединены ребром. Это позволяет делать вывод, что на рисунках (а) и (б) изображен один и тот же граф.

Выяснение того, соответствуют ли два рисунка одному и тому же графу или разным графам, представляет обычно трудную задачу. Задача особенно трудна, если рисунок содержит много вершин и ребер.

В первую очередь, конечно, следует сравнить число вершин, число ребер, число вершин с одинаковыми степенями; если они совпадают на обоих рисунках, то устанавливают взаимно однозначное соответствие вершин. После этого проверяют выполнение необходимого и достаточного условия соответствия двух рисунков одному и тому же графу. Конечно, если условия эти не выполняются, то еще нельзя делать вывода, что на рисунках изображены разные графы, так как могло быть неверно установлено взаимно однозначное соответствие между вершинами.

Кстати, в предыдущем примере установить соответствие двух рисунков одному и тому же графу еще легче было геометрически

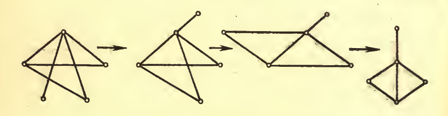


Рис. 1.56

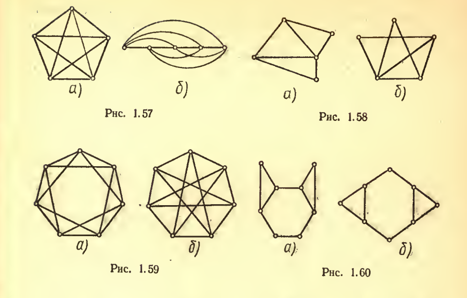


Рис. 1.57

Рис. 1.58

Рис. 1.59

Рис. 1.60

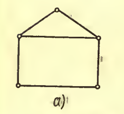
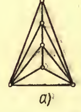




Рис. 1.61



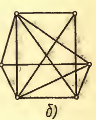


Рис. 1.62

(рис. 1.56). Однако использованный способ путем установления взаимно однозначного соответствия вершин оказывается более эффективным, когда в графе много вершин и ребер.

Упражнения

1.63. Докажите, что один и тот же граф изображен:
1) на рисунках 1.57 (а) и 1.57 (б);
2) на рисунках 1.58 (а) и 1.58 (б);
3) на рисунках 1.59 (а) и 1.59 (б).

1.64. Докажите, что рисунки 1.60 (а) и 1.60 (б) не соответствуют одному и тому же графу.

1.65. Выясните, один ли граф изображен:
1) на рисунках 1.61 (а) и 1.61 (б);
2) на рисунках 1.62 (а) и 1.62 (б).

1.66. Рассматриваются всевозможные деревья с пятью вершинами, причем каждая из вершин имеет либо степень 1, либо степень 2. Сколько таких деревьев вы сможете насчитать?

ГЛАВА II

ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

В этой главе рассказывается о некоторых геометрических особенностях изображений графа. Одни графы можно нарисовать на плоскости так, чтобы их ребра не имели общих точек, кроме вершин, им принадлежащих; другие графы так нарисовать нельзя. В силу этого отдельные графы могут рассматриваться как географические карты, нанесенные на плоскость или на сферу.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ПЛОСКОМ ГРАФЕ

На рисунке 2.1 изображен граф Г; некоторые ребра его пересекаются. На рисунке 2.2 этот же граф Г изображен так, что его ребра не пересекаются.

Граф Г называют *плоским*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не имели других общих точек, кроме их общей вершины.

Рисунок графа, в котором никакие два его ребра не пересекаются, если не считать точками пересечения общие вершины, называют плоским представлением графа. Ясно, что плоское представление имеет только плоский граф. Обратно, у всякого плоского графа непременно найдется плоское представление. Плоские графы — простые циклы, деревья, лес, а также и граф, содержащий цикл, из вершин которого «выходят» деревья (рис. 2.3).

Приведем еще один пример плоского графа Г (рис. 2.4). Легко проверить, что на рисунке 2.5 изображен тот же самый граф Г,

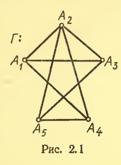


Рис. 2.1

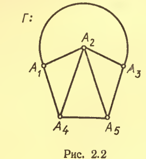


Рис. 2.2

что и на рисунке 2.4. Рисунок 2.5 служит плоским представлением графа Г.

Примером не плоского графа может служить полный граф с пятью вершинами. Любые попытки нарисовать его плоское представление обречены на неудачу.

Упражнения

2.1. Докажите, что граф Г плоский (рис. 2.6).

2.2. Существует ли граф с четырьмя вершинами, не являющийся плоским?

2.3. Является ли плоским граф, который может быть изображен проволочной моделью куба?

Рис. 2.3

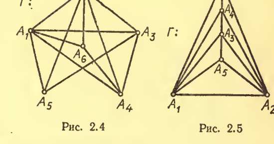


Рис. 2.4

Рис. 2.5

В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани.

Гранью в плоском представлении графа Г называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

На рисунке 2.7 плоское представление графа Г с четырьмя гранями: (1, 7, 4, 1), (1, 3, 2, 4, 1), (1, 2, 3, 1), (2, 6, 5, 4, 2). Часть плоскости, ограниченная простым циклом (1, 2, 4, 1), гранью не является, так как содержит внутри себя цикл (1, 2, 3, 1). А на рисунке 2.8 часть плоскости, ограниченная простым циклом (1, 2, 3, 4, 5, 1), является гранью, так как ребро (4, 5), расположенное внутри грани, не образует цикла. Не является гранью и заштрихованная часть плоскости на рисунке 2.9, так как она содержит внутри себя цикл, да к тому же эта часть плоскости не ограничена циклом.

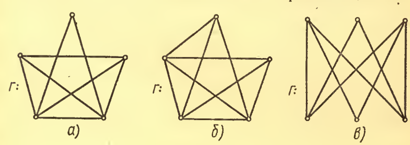


Рис. 2.6

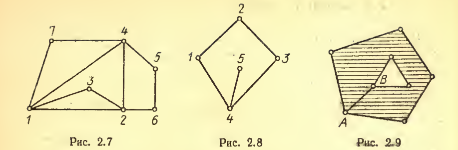


Рис. 2.7

Рис. 2.8

Рис. 2.9

Ребро (A, B) на рисунке 2.9 является мостом, соединяющим циклы. Такие мосты будем называть перегородками.

Простой цикл, ограничивающий грань, назовем границей грани.

Две грани будем называть соседними, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

Грани (1, 3, 2, 1) и (1, 3, 2, 4, 1) на рисунке 2.7 соседние, а грани (1, 3, 2, 1) и (2, 6, 5, 4, 2) не являются соседними.

В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную «вне» плоского представления графа; она ограничена «изнутри» простым циклом и не содержит в себе других циклов. Эту часть плоскости называют «бесконечной» гранью. На рисунке 2.10 часть бесконечной грани заштрихована. Часть плоскости, заштрихованная на рисунке 2.11, гранью не является, так как она не ограничена изнутри простым циклом. Ребро (A, B) в этом графе является перегородкой.

Всякое плоское представление графа либо не имеет бесконечной грани (рис. 2.11), либо имеет в точности одну бесконечную грань (рис. 2.10).

Как особый случай вводится бесконечная грань в плоском представлении дерева и леса. В плоском представлении дерева и леса за грань принимают всю плоскость рисунка.

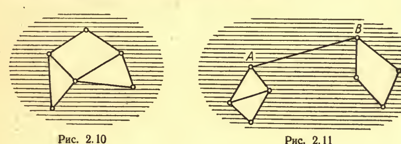


Рис. 2.10

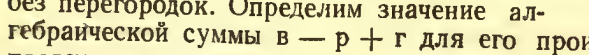
Рис. 2.11

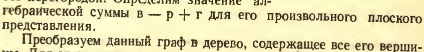
§ 2. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Для всякого плоского представления связного плоского графа без перегородок число вершин (в), число ребер (р) и число граней с учетом бесконечной (г) связаны соотношением: в — р + г = 2.

Рис. 2.12

Пусть граф Г — связный плоский граф без перегородок. Определим значение алгебраической суммы в — р + г для его произвольного плоского представления.





Преобразуем данный граф в дерево, содержащее все его вершины. Для этого удалим некоторые ребра графа Г, разрывая поочередно все его простые циклы, причем так, чтобы граф оставался связным и без перегородок.

Заметим, что при таком удалении одного ребра число граней уменьшается на 1, так как при этом либо пропадет один простой цикл, либо два простых цикла преобразуются в один. Следовательно, значение разности р — г при этом остается неизменным. На рисунке 2.12 ребра, которые удаляем, выделены штриховой линией.

В полученном дереве обозначим число вершин — $в_д$, число ребер — $р_д$, число граней — $г_д$. Справедливо равенство $р - г = р_д - г_д$.

В дереве одна грань, т. е. $р - г = р_д - 1$. Вспомним, что операция удаления ребер из графа не меняет число его вершин, т. е. $в = в_д$. По теореме 1.7 в дереве $в_д - р_д = 1$. Отсюда $в - р_д = 1$, т. е. $р_д = в - 1$, а потому $р - г = в - 2$ или $в - р + г = 2$.

Итак, доказано, что если в плоском представлении связного графа без перегородок в вершин, р ребер и г граней, то в — р + г = 2. Полученная формула называется формулой Эйлера.

Упражнения

2.4. Проверьте, что формула Эйлера справедлива для графов на рисунках 2.6 и 2.7.

2.5. Проверьте, справедлива ли формула Эйлера для графа на рисунке 2.3.

2.6. Покажите, что формула Эйлера не верна для графа, не являющегося связным.

Используем теперь формулу Эйлера для доказательства того, что графы определенного вида не плоские.

Решим две задачи.

Задача 2.1. На участке 3 дома и 3 колодца. От каждого дома к каждому колодцу ведет тропинка (рис. 2.13). Когда владельцы домов поссорились, они задумали проложить дороги от каждого дома к каждому колодцу так, чтобы не встречаться на пути к колодцам.

Покажите, что их намерения не могли осуществиться.

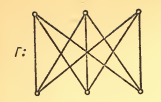


Рис. 2.13

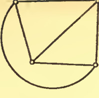


Рис. 2.14

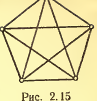


Рис. 2.15

Решение. Для решения задачи достаточио доказать, что граф Г, изображеииый иа рисунке 2.13, ие плоский.

Предположим, что граф Г — плоский, т. е. существует его плоское представлеиие. Граф Г — связный, он ие имеет ии одиого моста, поэтому ие имеет и перегородок. По формуле Эйлера: $в - р + г = 2$. Подсчитаем число вершии и ребер: $в = 6$, $р = 9$, поэтому $г = 2 - 6 + 9 = 5$.

Теперь оцеиим удвоеииое число ребер 2р. Заметим, что в графе иа рисунке 2.13 иет простых циклов длиной 3, т. е. граиица любой грани в плоском представлеиии графа Г содержит не менее четырех ребер. Заметим, что каждое ребро служит граиицей двух граней, так как мы учитываем и бескоиечную грань. При этом число 4г ие может быть больше удвоеииого числа всех ребер: $4г \leqslant 2р$. Если бы мы зиали число ребер в граиице каждой граии, то их сумма должиа быть равиа 2р; ио известио, что $2р = 18$, а $4г = 20$, откуда $20 \leqslant 18$. Получеииое противоречие доказывает, что предположеиие было иевериое, т. е. граф Г на рисуике 2.13 ие плоский. Намереиия соседей иеосуществимы.

Задача 2.2. Каждый из четырех соседей соедииил свой дом с тремя другими дорожками, которые пересекались лишь около домов (рис. 2.14). Докажите, что дом пятого соседа со всеми остальиыми домами соедиинить иепересекающимися дорожками иевозможио, т. е. ои выиуждеи построить мост или рыть подземиый ход.

Решеиие задачи, очевидио, сводится к доказательству того, что полиый граф Г с пятью вершииами (рис. 2.15) не является плоским.

Решеиие. Предположим, что граф Г плоский, т. е. существует его плоское представлеиие. Граф Г — связиый, ои не имеет перегородок, так как ие имеет ни одного моста. Для плоского представлеиия графа Г вериа формула Эйлера. Подсчитаем число вершии и ребер: $в = 5$, $р = 10$, тогда $г = 2 - 5 + 10 = 7$.

Оценим удвоеиное число ребер 2р. Каждая грань ограничена ие более чем тремя ребрами (граф полный), причем каждое ребро прииадлежит границам двух граией, поэтому число 3г ие может быть больше числа 2р, то есть $3г \leqslant 2р$. Но $2р = 20$, а $3г = 21$, то есть $20 \geqslant 21$. Противоречие доказывает, что предположеиие было иевериым, то есть граф Г ие плоский.

Решая задачи 2.1 и 2.2, мы доказали важные для теории графов утверждеиия, согласно которым графы на рисунках 2.13 и 2.15 ие плоские.

Если мы добавим новые вершины, которые расположены на ребрах этих графов, то новые графы тоже окажутся не плоскими. Один из этих графов называют графом типа I (рис. 2.16 а), другой—графом типа II (рис. 2.16 б).

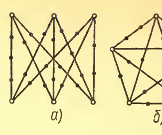


Рис. 2.16

Сформулируем теорему о плоских графах; доказательство его в данном курсе опускается[1].

Теорема 2.1 (Понтрягина — Куратовского). *Граф является плоским тогда и только тогда, когда он не имеет подграфом графа типа I или типа II.*

§ 3. ТРИАНГУЛИРОВАННЫЙ ГРАФ

На рисунке 2.17 а изображен плоский граф Г с пятью вершинами. Если добавить к нему ребра (1, 3) и (1, 5), то полученный новый граф Г тоже будет плоским (рис. 2.17 б). К этому графу не удастся добавить ни одного ребра так, чтобы новый граф тоже был плоским (убедитесь в этом!).

Плоский граф называется *максимально плоским*, если невозможно добавить к нему ни одного ребра так, чтобы полученный граф был плоским.

Граф, изображенный на рисунке 2.17, является максимально плоским.

Каждая грань в плоском представлении максимально плоского графа имеет 3 вершины. Поэтому максимально плоский граф называют еще *триангулированным.*

Операция добавления новых ребер, в результате которой в плоском представлении каждая грань имеет ровно 3 вершины, называется *триангуляцией графа.*

Обратите внимание на то, что триангулированный граф имеет ровно три «внешних» ребра (рис. 2.17 б). (Они составляют границу бесконечной грани.)

Интересно, что триангулированные графы с одним и тем же числом вершин могут не совпадать. На рисунке 2.18 изображены два разных триангулированных графа с шестью вершинами. В одном есть две вершины степени 5 (рис. 2.18, правый), а в другом вершины степени 5 нет (рис. 2.18, левый).

Но существует только один триангулированный граф с четырьмя вершинами и только один — с пятью вершинами. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

[1] Доказательство теоремы Понтрягина—Куратовского см., например, в книге [1].

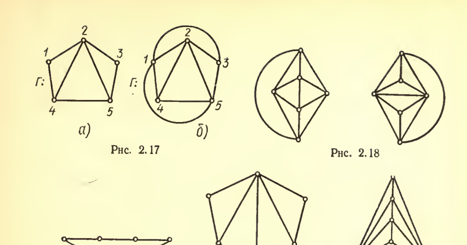


Рис. 2.17

Рис. 2.18

Рис. 2.19

Упражнения

2.7. Приведите примеры не плоских графов с шестью вершинами.

2.8. Можно ли к графу Г (рис. 2.19) добавить новые ребра так, чтобы полученный граф остался плоским? Если можно, то какие?

2.9. Триангулируйте граф с n изолированными вершинами, если

а) $n = 3$; в) $n = 7$;

б) $n = 4$; г) $n = 8$.

Подсчитайте в каждом случае число полученных «треугольных» граней[1]. (Следите, чтобы при триангуляции не соединять ребром те вершины, которые уже соединены ребром.)

2.10. Приведите пример двух разных триангулированных графов с семью вершинами. Сравните число треугольных граней в плоских представлениях этих графов.

2.11. Чему равно число треугольных граней в плоском представлении триангулированного графа с n вершинами, если

а) $n = 3$; в) $n = 5$;

б) $n = 4$; г) $n = 6$?

2.12. Докажите, что в плоском представлении триангулированного графа с n вершинами число треугольных граней $1 + 2(n - 3)$, если бесконечную грань не учитывать.

§ 4. ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕБЕР ПЛОСКОГО ГРАФА ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ОТРЕЗКАМИ

Теорема 2.2 (Фари). *Для любого плоского графа Г существует плоское представление, в котором все ребра — прямолинейные отрезки.*

---

[1] Под «треугольной» гранью понимаем грань, ограниченную 3 ребрами.

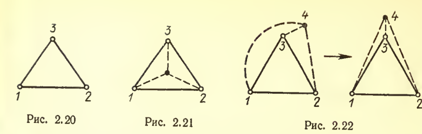


Рис. 2.20 Рис. 2.21 Рис. 2.22

При доказательстве достаточно рассмотреть максимально плоские графы, так как если существует плоское представление с прямолинейными ребрами для максимально плоского графа, то при необходимости из него можно удалить «лишние» ребра.

Доказательство. Число вершин в графе обозначим через в. Сначала рассмотрим несколько частных случаев. Если в = 1, в = 2 и в = 3, справедливость теоремы очевидна. Для в = 3 получим треугольную грань (рис. 2.20).

Пусть в = 4. Четвертая вершина по отношению к треугольной грани может находиться в одном из двух положений: либо внутри, либо вне ее. Если четвертая вершина внутри треугольной грани, то ее можно соединить прямолинейными отрезками с тремя вершинами графа (рис. 2.21). Если четвертая вершина вне треугольной грани, то мы сможем нарисовать данный граф с помощью прямолинейных ребер (рис. 2.22).

Теперь проведем доказательство методом математической индукции по числу вершин графа. Для в = 3 теорема верна.

Допустим теперь, что теорема верна для какого-то максимально плоского графа Г с числом вершин в > 3. Рассмотрим плоское представление этого максимально плоского графа Г с в вершинами, в котором все ребра прямолинейные отрезки. Добавим еще одну вершину b_{n+1}. Она может оказаться либо внутри одной из треугольных граней, либо вне их.

Если она попадет внутрь, то мы сможем соединить ее прямолинейными ребрами с тремя вершинами этой треугольной грани.

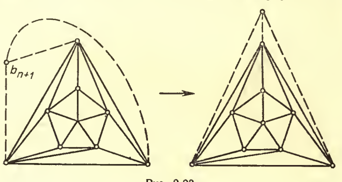


Рис. 2.23

Если она находится вне рисунка графа, то мы ее соединим ребрами с «внешними» вершинами графа (их тоже три, так как граф триангулирован).

И в этом случае мы сможем нарисовать плоское представление графа с помощью прямолинейных ребер (рис. 2.23). Если же вершины попадают на ребра, то случай очевиден.

В силу принципа математической индукции теорема верна для всякого максимально плоского графа с любым числом вершин.

Упражнение

2.13. Нарисуйте плоское представление с прямолинейными ребрами графа Г (рис. 2.24).

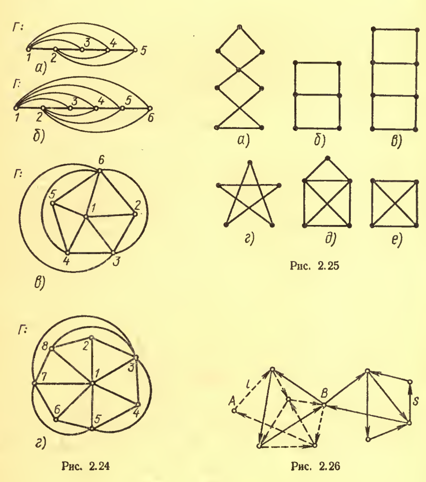


Рис. 2.24

Рис. 2.25

Рис. 2.26

§ 5. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ[1]

К задачам на эйлеровы графы относятся головоломки, в которых требуется вычертить на плоскости одним росчерком замкнутые кривые, обводя каждый участок в точности один раз.

Исторически топология и теория графов зародились при решении Эйлером задачи именно такого вида (задачи о Кенигсбергских мостах) (см. [4]). Задачи на отыскание путей через лабиринты, близкие к задачам на эйлеровы графы, находят применение в современной психологии, а также при конструировании вычислительных машин. Примеры на практическое применение эйлеровых графов и лабиринтов можно встретить в книгах [4], [13], [65].

Попробуйте обвести изображения графов на рисунке 2.25, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя уже по обведенному ребру вторично.

Задание по обведению ребер удается выполнить для графов на рисунках 2.25 (а, б, г, д). Графы на рисунках 2.25 (в, е) нарисовать без отрыва карандаша от бумаги или не проходя дважды по ребрам не удастся. В чем секрет? Какие свойства графа повлияли на это? Для удобства введем специальные понятия.

Эйлеровым путем в графе называется путь, содержащий все ребра графа.

Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа.

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом.

Принято всякую замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, называть *уникурсальной*.

Рисунок графа, обладающего эйлеровым путем или эйлеровым циклом, является уникурсальной линией.

Теорема 2.3. *Если граф Г обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины четные.*

Доказательство. Связность графа следует из определения эйлерова цикла. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз, поэтому, сколько раз эйлеров путь приведет конец карандаша в вершину, столько и выведет, причем уже по другому ребру. Следовательно, степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: одно — результат подсчета входов в вершину, другое — выходов.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.4. *Если граф Г связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.*

Доказательство. Если начать путь из произвольной вершины графа Г, то найдется цикл, содержащий все ребра графа.

Пусть A — произвольная вершина графа Г (рис. 2.26). Из A

[1] Эйлеровы графы, как и лабиринты (см. § 6), могут быть и не плоскими.

начнем путь l по одному из ребер и продолжим его, проходя каждый раз по новому ребру.

Все вершины графа имеют четные степени, поэтому если есть «выход» из A, то должен быть и «вход» в A, так же как и для любой другой вершины. И если есть «вход» в вершину, то должен быть и «выход».

Так как число ребер конечно, то этот путь должен окончиться, причем в вершине A (на рисунке 2.26 путь l и направление его обхода показаны штриховыми стрелками).

Если путь l, замкнувшийся в A, проходит через все ребра графа, то мы получим искомый эйлеров цикл.

Если остались непройденные ребра, то должна существовать вершина B, принадлежащая l и ребру, не вошедшему в l.

Так как B — четная, то число ребер, которым принадлежит B и которые не вошли в путь l, тоже четно. Начнем новый путь s из B и используем только ребра, не принадлежащие l. Этот путь кончится в B. (На рисунке 2.26 путь s обозначен сплошными стрелками.) Объединим теперь оба цикла: из A пройдем по пути l к B, затем по циклу s и, вернувшись в B, пройдем по оставшейся части пути l обратно в A.

Если снова найдутся ребра, которые не вошли в путь, то найдем новые циклы. Число ребер и вершин конечно, процесс закончится.

Итак, приведен алгоритм, позволяющий отыскать эйлеров цикл, и показано, что он применим во всех случаях, допускаемых условиями теоремы.

Таким образом, замкнутую фигуру, в которой все вершины четные, можно начертить одним росчерком без повторений, начиная обводить ее с любой точки.

Если граф не обладает эйлеровым циклом, то можно поставить задачу об отыскании одного эйлерова пути или нескольких эйлеровых путей, содержащих все ребра графа.

Т е о р е м а 2.5. *Если граф Г обладает эйлеровым путем с концами A и B (A не совпадает с B), то граф Г связный и A и B — единственные нечетные его вершины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Связность графа следует из определения эйлерова пути.

Если путь начинается в A, а заканчивается в другой вершине B, то и A и B — нечетные, даже если путь неоднократно проходил через A и B. В любую другую вершину графа путь должен был привести и вывести из нее, то есть все остальные вершины должны быть четными.

Верно и обратное.

Т е о р е м а 2.6. *Если граф Г связный и A и B единственные нечетные вершины его, то граф Г обладает эйлеровым путем с концами A и B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вершины A и B могут быть соединены ребром в графе (рис. 2.27), а могут быть и не соединены (рис. 2.28).

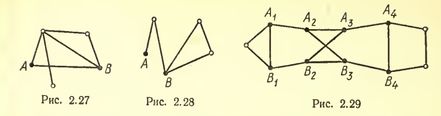


Рис. 2.27 Рис. 2.28 Рис. 2.29

Если A и B соединены ребром, то удалим его; тогда все вершины станут четными. Новый граф, согласно предыдущей теореме, обладает эйлеровым циклом, началом и концом которого может служить любая вершина. Начнем эйлеров путь в вершине A и кончим его в вершине A. Добавим ребро (A, B) и получим эйлеров путь с началом в A и концом в B.

Если A и B не соединены ребром, то к графу добавим новое ребро (A, B), тогда все вершины его станут четными. Новый граф, согласно предыдущей теореме, обладает эйлеровым циклом. Начнем его из вершины A по ребру (A, B). Закончится путь тоже в вершине A. Если удалить теперь из полученного цикла ребро (A, B), то останется эйлеров путь с началом в B и концом в A или с началом в A и концом в B.

Таким образом, всякую замкнутую фигуру, имеющую в точности две нечетные вершины, можно начертить одним росчерком без повторений, начав в одной из нечетных вершин, а кончив в другой.

Т е о р е м а 2.7. *Если связный граф Г имеет 2k нечетных вершин, то найдется семейство из k путей, которые в совокупности содержат все ребра графа в точности по одному разу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Половину нечетных вершин обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_k$, другую половину — $B_1, B_2, \ldots, B_k$ (рис. 2.29). Если вершины A_i и B_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ соединены ребром, то удалим из графа Г ребро (A_i, B_i). Если вершины A_i и B_i не соединены ребром, то добавим к Г ребро (A_i, B_i). Все вершины нового графа будут четными, то есть в новом графе найдется эйлеров цикл. При восстановлении графа Г цикл разобьется на k отдельных путей, содержащих все ребра графа.

Эйлеровым графом может быть план выставки; это позволяет так расставить указатели маршрута, чтобы посетитель смог пройти по каждому залу в точности по одному разу.

Упражнения

2.14. Существует ли эйлеров цикл в графе Г (рис. 2.30)? Если существует, найдите его.

2.15. Существует ли эйлеров путь в графе Г (рис. 2.31)? Если существует, найдите его.

2.16. Найдите эйлеров путь в графе Г (рис. 2.32).

2.17. Нарисуйте граф с восемью вершинами, который:

а) имеет эйлеров цикл;

б) имеет эйлеров путь;

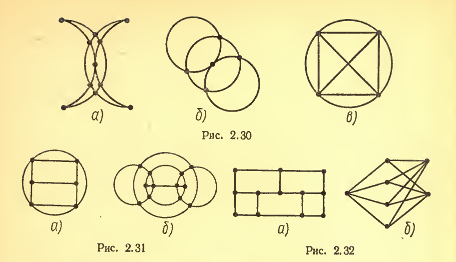


Рис. 2.30

Рис. 2.31

Рис. 2.32

в) не имеет ни эйлерова цикла, ни эйлерова пути;

г) имеет простой путь, содержащий все ребра графа.

2.18. На рисунке 2.33 схема зоопарка. (Вершины графа — вход, выход, перекрестки, повороты, тупики, ребра — дорожки, вдоль которых расположены клетки.)

Найдите маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им всех зверей и не проходя более одного раза ни одного участка пути.

2.19. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале ровно один раз? Соответствующий граф приведен на рисунке 2.34; вершины графа — это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра — залы и коридоры.

2.20. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход (рис. 2.34), чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

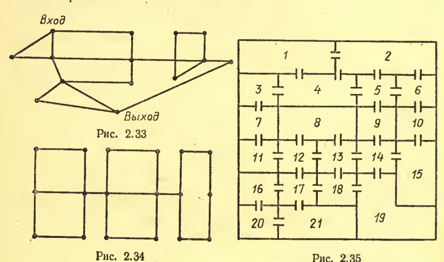


Рис. 2.33

Рис. 2.34

Рис. 2.35

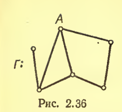


Рис. 2.36

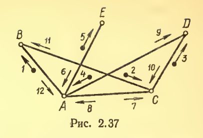


Рис. 2.37

2.21. На рисунке 2.35 план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После смерти рыцаря его наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую; сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

Оказывается, если план выставки представляет собой связный граф и если экспонаты расположены по обеим сторонам залов, то можно составить такой замкнутый маршрут, что по каждому залу посетитель сможет пройти в точности два раза — по одному с каждой стороны, причем в разных направлениях.

Аналогично, любой город (в этом случае граф всегда связный), например Москву, можно обойти, пройдя по каждой улице ровно два раза — по одному в каждом направлении.

Упражнение

2.22. На рисунке 2.36 изображен связный граф Г. Найдите замкнутый путь из A, содержащий все ребра графа дважды, по одному разу в каждом направлении. (Проходя по ребру, ставьте рядом стрелку.)

Теорема 2.8. *Если граф Г связный, то можно построить цикличный маршрут, содержащий все ребра графа в точности два раза, по одному в каждом направлении.*

Доказательство. Дадим общее правило построения такого пути, предложенное Тарри[1].

Из произвольной вершины A пройдем вдоль какого-нибудь ребра (A, B), отметив его стрелкой, указывающей направление пути (рис. 2.37). Из B пройдем к третьей вершине, снова отметив стрелкой направление прибытия, и так далее. Ребро, по которому *впервые* прибываем в вершину, будем отмечать стрелкой вида «•⟶».

Выходя из вершины, выбирают дальнейший путь: либо ребро, по которому еще не проходили ни разу, либо ребро, по которому прибыли в эту вершину. Договариваемся, что ребро, *по которому впервые попали в вершину*, будем использовать для выхода только тогда, когда оно остается *единственным выходом* из этой вершины.

Продолжаем строить путь, пока это возможно. Заметим, что в каждой вершине имеется одинаковое число возможностей для

[1] Тарри — французский математик XIX столетия.

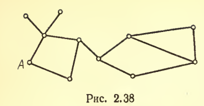


Рис. 2.38

входа и выхода. Процесс может закончиться только в исходной вершине A.

На рисунке 2.37 дан связный граф Г, на котором по правилу Тарри построен искомый цикл; для удобства стрелки пронумерованы.

Итак, процесс закончился в A. Теперь необходимо доказать, что в обоих направлениях пройдены все ребра. Выхода из A более нет, так как иначе процесс бы не закончился и мы могли бы двигаться дальше. Все входы в вершину A тоже использованы, так как их число равно числу путей, по которым мы выходили из A. В частности, ребро (A, B) пройдено в обоих направлениях. Следовательно, все ребра, которым принадлежит B, тоже пройдены в обоих направлениях, так как первое входящее в B ребро (A, B) по условию могло быть использовано в качестве выходящего лишь в последнюю очередь.

То же рассуждение применимо к третьему в пути ребру (C, D) и следующей вершине C и т. д. Поскольку граф связный и имеет конечное число вершин и ребер, аналогично можно исследовать все его вершины и все ребра.

Упражнения

2.23. Найдите замкнутый путь из вершины A, содержащий все ребра графа Г дважды, по одному разу в каждом направлении (рис. 2.38).

2.24. Докажите, что не для всякого связного графа Г найдется цикличный маршрут, содержащий все ребра в точности по три раза.

2.25. Приведите примеры связного графа с шестью вершинами, для которого найдется замкнутый маршрут, содержащий все его ребра в точности три раза.

§ 6. ЛАБИРИНТЫ

Способ обходить все ребра графа можно использовать, например, для отыскания пути, позволяющего выбраться из лабиринта.

Лабиринты, как известно, состоят из коридоров, их перекрестков, тупиков (любой участок можно проходить по нескольку раз),

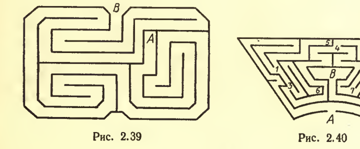


Рис. 2.39 Рис. 2.40

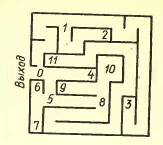


Рис. 2.41

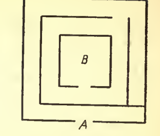


Рис. 2.42

и маршруты в них могут быть представлены графами, в которых ребра соответствуют коридорам, а вершины — входам, выходам, перекресткам и тупикам.

На рисунках 2.39 и 2.40 приведены планы известных лабиринтов.

Упражнения

2.26. Нарисуйте граф, соответствующий лабиринту на рисуике 2.39.
2.27. Нарисуйте граф, соответствующий лабириιту иа рисуике 2.40.

Задача о лабиринте в общем случае сводится к построению алгоритма, позволяющего отыскать маршрут в соответствующем графе от заданной вершины A до заданной вершины B. Вершина A может быть входом или внутренней точкой лабиринта, из которой нужно выбраться, вершина B — выходом или тоже внутренней точкой, в которую необходимо попасть. Для того чтобы избежать бесконечного блуждания, необходимо иметь возможность запоминать пройденный путь, например, отмечать ребра графа, по которым уже прошли, и направление пути.

Если известно, что у лабиринта все «стенки» связаны друг с другом, т. е. нет замкнутых маршрутов, по которым можно возвращаться в исходную точку, то такой лабиринт всегда можно обойти весь, касаясь стенки одной рукой, например правой.

Упражнения

2.28. Убедитесь в том, что, войдя в лабиринт, изображенный на рисуике 2.39, можио, касаясь правой рукой стеиы, дойти до точки A и вериуться в B.

2.29. На рисунке 2.41 изображен лабириит. Убедитесь в том, что из любой его точки к точке O можно попасть, если идти, держась все время правой рукой стеиы. Предварительио нарисуйте соответствующий граф. (На таком рисуике легче увидеть пути, которые уже пройдеиы и которые предстоит пройти.)

Если же лабиринт содержит замкнутые маршруты как на рисунках 2.40 и 2.42, то, касаясь одной рукой стенки, не всегда можно пройти все коридоры и тупики лабиринта[1].

[1] В схемах, соответствующих таким лабириитам, две вершииы могут быть соедииены и иесколькими ребрами. Такие схемы иазывают мультиграфами.

Упражнения

2.30. Убедитесь, что нельзя, войдя в лабиринт (рис. 2.42), попасть в комнату B, окруженную стеной, не связанной с остальными, если идти, касаясь правой рукой стены.

2.31. Убедитесь, что нельзя попасть из комнаты B к выходу A, если идти по лабиринту (рис. 2.42), касаясь все время правой рукой стены.

2.32. Убедитесь, что не удастся пройти по коридору (7,6) на рисунке 2.40, если идти из точки A, все время касаясь правой рукой стены.

Разработаны алгоритмы, позволяющие обойти любой лабиринт, не пользуясь его схемой.

Одно из правил обхода любого лабиринта было предложено французским математиком Тарри. Это правило встречалось нам в теореме 2.8 о прохождении по каждому ребру графа дважды, по одному в каждом направлении. Согласно ему при обходе лабиринта следует, попадая в любой *перекресток A впервые* по некоторому пути a, при возвращении в этот перекресток A избегать пользоваться путем a до тех пор, пока это возможно; и лишь только в том случае *идти по пути a в обратную сторону, когда все остальные пути из A будут пройдены дважды.*

Упражнения

2.33. Убедитесь, что, пользуясь правилом Тарри, можно из точки A попасть в коридор (6,7) и выйти из лабиринта (рис. 2.40).

2.34. Убедитесь, что, пользуясь правилом Тарри, мы обязательно из точки A попадем в комнату B и выйдем обратно (рис. 2.42).

§ 7. ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ И ПУТИ В ГРАФАХ

В 1857 году ирландский математик Гамильтон предложил игру, названную «путешествие по додекаэдру». Игра сводилась к обходу по ребрам всех вершин правильного додекаэдра (рис. 2.43) при условии, что *ни в одну из вершин нельзя заходить более одного раза.*

Додекаэдр — это многогранник, гранями которого служат 12 правильных пятиугольников. У него 20 вершин и 30 ребер. На рисунке 2.43 изображен додекаэдр с прозрачными гранями, а на рисунке 2.44 — с непрозрачными. Обратите внимание, что в каждой

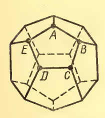
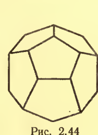


Рис. 2.43


Рис. 2.44

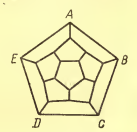


Рис. 2.45

его вершине сходятся по три ребра. (Это нам пригодится в дальнейшем.)

Вершины и ребра додекаэдра составляют некоторый плоский граф. Плоское его представление можно получить следующим образом. Пусть ребра проволочного додекаэдра можно растягивать без разрывов. Взявшись за вершины A, B, C, D, E, растянем «каркас» додекаэдра на плоскости так, чтобы не появилось новых точек пересечения ребер (рис. 2.45). Плоское представление готово.

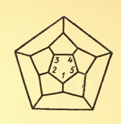


Рис. 2.46

З а д а ч а 2.3. Найдите цикл, содержащий все вершины додекаэдра, причем в точности по одному разу каждую. Для определенности начните путь из вершины 1 и в первую очередь посетите вершины 2, 3, 4 и 5 (рис. 2.46).

Один из возможных циклов показан на рисунке 2.47. Если использовать нумерацию вершин этого рисунка, то другой цикл запишется так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20.

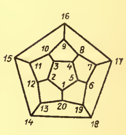


Рис. 2.47

Гамильтоновым циклом (путем) в графе называется цикл (путь), проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Гамильтоновым путем в графе называется путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Гамильтонов путь (цикл) всегда является простым. Он может не содержать всех ребер графа.

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым графом*.

Вспомните, что в задаче 1.1 и в упражнениях 1.14—1.17 тоже требовалось найти гамильтоновы пути.

Исследуем путешествие по додекаэдру подробнее. Заметим, что путешественник, прибывший в одну из вершин графа, может либо пойти по ребру, расположенному справа (обозначим эту операцию через П), либо по ребру слева (эту операцию обозначим через Л), либо остаться на месте (эту операцию обозначим через 1). Операцию, при которой путешественник, проходя по ребрам, возвращается в ту же вершину, тоже будем обозначать 1. Несколько последовательных поворотов будем обозначать последовательностью соответствующих букв. Например, ЛЛЛП, или сокращенно $Л^3П$, — это три поворота налево и поворот направо.

Один путь будем заменять другим, если оба они от одной и той же вершины приводят тоже к одной и той же вершине. Например, оказывается, что

$$ПЛ^3П = Л^2$$
$$Л^5 = 1; \qquad П^5 = 1.$$

Попробуем найти гамильтонов цикл на додекаэдре, заменяя путь $Л^2$ другим, а именно $ПЛ^3П$, приводящим в ту же вершину, но ведущим по новым ребрам.

За основу возьмем цикл по ребрам одной из граней: $1 = Л^5$. С помощью знака равенства напишем последовательность замен $Л^2$ на $ПЛ^3П$:

$$1 = Л^5 = Л^2Л^3 = (ПЛ^3П)Л^3 = ПЛ^2ЛПЛ^2Л = П\,(ПЛ^3П)ЛП \times \times (ПЛ^3П)Л = П^2Л^2ЛПЛПЛП^2Л^2ЛПЛ = П^2(ПЛ^3П)ЛПЛП^2\,(ПЛ^3П) \times \times ЛПЛ = П^3Л^3ПЛПЛП^3Л^3ПЛПЛ.$$

Этот цикл из 20 ребер (поворотов). Из него нельзя выделить последовательность поворотов меньше чем из двадцати ребер, приводящую в одну из уже пройденных вершин. Такая последовательность поворотов задает гамильтонов цикл.

Другой гамильтонов цикл можно получить, заменив Л на П, а П на Л, этот цикл симметричен полученному, его можно записать так:

$$Л^3П^3ЛПЛПЛ^3П^3ЛПЛП = 1.$$

Можно пойти и в обратном направлении:

$$ПЛПЛП^3Л^3ПЛПЛП^3Л^3.$$

Все эти пути замкнуты, путешествие можно начинать в разных точках указанных циклов.

Если не требовать возвращения в исходный пункт, то число путешествий значительно возрастет.

Упражнения

2.35. На рисунке 2.47 изображены 20 городов (они произвольно пронумерованы) и дороги, соединяющие их. Предлагается, начав путешествие в городе 1, объехать все остальные города, не заехав ни в один город более одного раза. Выпишите последовательность городов, в которой можно совершить такое путешествие, если:

а) окончить путешествие нужно в городе 16;

б) в первую очередь нужно заехать в города 2, 12, 11 и 10, а вернуться в город 1;

в) в первую очередь нужно заехать в города 2 и 3, а окончить путешествие в городе 18.

2.36. Вокруг дома садовник посадил 20 кустов роз, которые пронумеровал так, чтобы он мог, выйдя из дома, который находился в центре участка, обойти все розы, побывав у каждой в точности один раз (рис. 2.48). Однажды он, изменив своим правилам, полил сначала розы под номерами 19, 18, 17 и 16 и еще 6 роз. После этого оказалось, что он уже не мог полить остальные, не побывав ни у одной более одного раза. Какие 6 шагов он сделал неосторожно?

2.37. Какой из графов, изображенных на рисунке 2.49, является эйлеровым или гамильтоновым?

2.38. На рисунке 2.50 изображена схема, на которой точкой отмечен магазин, а остальными вершинами места жительства заказчиков. Как шоферу машины «Доставка на дом» объехать всех заказчиков, не подъезжая ни к одному дому более одного раза?

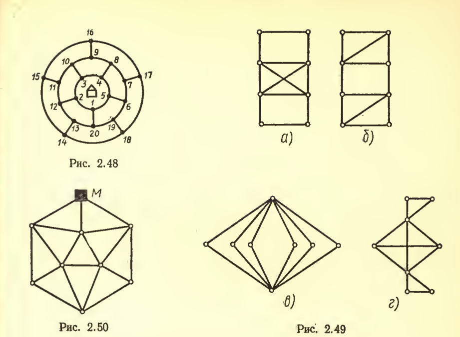


Рис. 2.48

Рис. 2.50

Рис. 2.49

Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все ребра, и притом по одному разу каждое, вторые — все вершины, по одному разу каждую. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их отыскания резко отличаются по степени трудности. Как вы уже знаете, для решения вопроса о существовании эйлерова цикла на графе достаточно выяснить, все ли его вершины четны. Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе еще не найден. Решение этой проблемы имеет практическую ценность, так как к игре Гамильтона близка известная задача о коммивояжере, который должен объехать несколько пунктов и вернуться обратно. Он обязан побывать в каждом пункте в точности по одному разу и заинтересован затратить на поездку как можно меньше времени. А для этого требуется определить все варианты посещения городов и подсчитать в каждом случае затрату времени. По своей математической постановке игра Гамильтона близка к задаче о порядке переналадки станков, задаче о подводке электроэнергии к рабочим местам и др. Подробнее об этом рассказывается, например, в книге [71].

Рассмотрим здесь несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе.

Во-первых, всякий полный граф является гамильтоновым. Действительно, он содержит такой простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа. Во-вторых, если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым. На рисунке

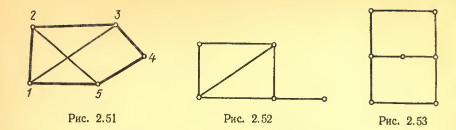


Рис. 2.51 Рис. 2.52 Рис. 2.53

2.51 простой (гамильтонов) цикл выделен жирной линией (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1). Заметим также, что если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

Упражнение

2.39. Найдите в графе, изображенном на рисунке 2.51, еще два гамильтоиовых цикла.

Если же гамильтонов граф объединить с еще одной вершиной ребром (рис. 2.52) так, что образуется висячая вершина, то такой граф гамильтоновым не является, поскольку не содержит простого цикла, проходящего через все вершины графа. Не является гамильтоновым и граф, представляющий собой простой цикл с «перекладинкой», на которой расположены одна или несколько вершин (рис. 2.53). Такие графы называют «тэта-графами», поскольку они похожи на греческую букву Θ («тэта»). По рисунку 2.53 видно, что в таком графе не удастся выделить простой цикл, содержащий все вершины.

Дальнейшее распознание гамильтоновых и негамильтоновых графов по их рисункам является делом несравненно более сложным, чем узнавание эйлерова графа. Выведем тем не менее еще два достаточных признака гамильтоновых графов.

Рассмотрим граф Γ с $m \geqslant 3$ вершинами. Пронумеруем их произвольным образом и выпишем их последовательность:

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{l-1},\ A_l,\ A_{l+1},\ \ldots,\ A_{m-1}. \qquad (1)$$

При этом может, конечно, случиться, что некоторые две соседние вершины, например A_k и A_{k+1}, не связаны ребром. Будем тогда говорить, что в данной последовательности имеется «разрыв» между вершинами A_k и A_{k+1}.

Очевидно, в последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_{l-1}, A_l$ не возникнут другие разрывы, если ее записать в обратном порядке, а именно: $A_l, A_{l-1}, \ldots, A_2, A_1$.

Пусть для определенности разрыв в последовательности (1) имеет место между вершинами A_0 и A_1. Положим теперь, что A_l — вершина графа Γ, связанная ребром с A_0. Число таких вершин A_l равно (степ. A_0).

Пытаясь ликвидировать разрыв в последовательности (1) между A_0 и A_1, запишем ее в измененном порядке:

$$A_0,\ A_i,\ A_{i-1},\ \ldots,\ A_2,\ A_1,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_{m-1}. \qquad (2)$$

При этом число разрывов уменьшится на единицу в том случае, если между вершинами A_1 и A_{i+1} не возникнет новый разрыв.

Вершину A_i среди $m - 1$ вершин, не совпадающих с A_0, можно всегда найти так, чтобы между A_1 и A_{i+1} не возник новый разрыв, если справедливо неравенство

$$\text{степ. } A_0 \geqslant (m-1) - \text{степ. } A_1$$

(справа в этом неравенстве читаем число разрывов, которые могут произойти при всевозможных перестановках последовательности (1)).

Вспоминаем теперь, что вершины A_0 и A_1 были выбраны произвольно; можно было рассмотреть разрыв между другими соседними вершинами A_k и A_{k+1} в последовательности (1); можно было даже выбрать вершины U и V графа Г, не стоящие рядом в последовательности (1). Лишь бы соблюдалось неравенство

$$\text{степ. } U \geqslant (m-1) - \text{степ. } V. \qquad (3)$$

Заметим, что неравенство (3) симметрично относительно U и V. Его можно записать в виде

$$\text{степ. } U + \text{степ. } V \geqslant m - 1. \qquad (4)$$

И тогда в последовательности (1) удастся ликвидировать все разрывы. А это означает, что в графе Г найдется гамильтонов путь.

Покажем теперь, что если для любой пары вершин U и V графа Г с m вершинами справедливо неравенство

$$\text{степ. } U + \text{степ. } V \geqslant m, \qquad (5)$$

то граф Г обладает гамильтоновым циклом. Это один из достаточных признаков того, что данный граф является гамильтоновым.

Рассмотрим (см. рис. 2.54) гамильтонов путь, связывающий вершины U и V графа Г.

Пусть X — одна из вершин графа Г, связанная ребром с вершиной U. Тогда в силу неравенства (5) хотя бы для одной из таких вершин X найдется в гамильтоновом пути смежная с ней вершина W, такая, которая связана ребром с V.

Добавляя к гамильтонову пути ребра (U, X) и (W, V) и выбрасывая из него ребро (W, X), получаем гамильтонов цикл, что и требовалось.

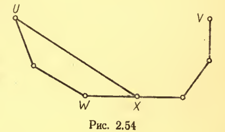


Рис. 2.54

Теперь, как следствие, получаем еще один достаточный признак того, что данный граф является гамильтоновым.

Формулируется этот признак так:

Граф Г с m вершинами имеет гамильтонов цикл, если для произвольной его вершины A_i $(i = 0, 1, \ldots, m - 1)$

$$\text{степ. } A_i \geqslant \frac{m}{2}. \qquad (6)$$

Хотя этот признак проще работает, чем предыдущий (при его использовании меньше приходится считать), но он позволяет распознать более узкий класс гамильтоновых графов.

Проведенное нами доказательство справедливости достаточных признаков гамильтоновых графов было косвенным — мы не строили для данного произвольного графа, удовлетворяющего неравенству (5) или неравенству (6), гамильтоновых циклов.

Упражнение

2.40. Не используя выведенных признаков, докажите, что граф Г, удовлетворяющий условию (5), является:

а) связным;

б) не имеет висячих вершин.

ГЛАВА III

ГРАФЫ С ЦВЕТНЫМИ РЕБРАМИ

В этой главе рассматриваются графы, соответствующие таким ситуациям, в которых одни пары элементов множества находятся между собой в одном отношении, другие пары этого множества — в другом отношении, третьи — в третьем (но каждая пара — в одном отношении!). Например, среди участников шахматного турнира к какому-то моменту могут быть такие, которые уже сыграли партию друг с другом, и такие, которые не сыграли. Среди множества стран есть страны, установившие между собой дипломатические связи, и страны, между которыми не установлены дипломатические связи. Для удобства на рисунках графов ребра, соответствующие одному отношению, окрашивают в один цвет, а ребра, соответствующие другому отношению, — во второй цвет и т. д. Такие графы называются графами с цветными ребрами. Они помогают решить немало разных задач, некоторые из них мы здесь приведем. Попутно выведем свойства таких графов. Так как печать в этой книге одноцветная, то на рисунках ребра будут отличаться не цветом, а типом линии. Договоримся, что вместо красной линии будем рисовать сплошную, вместо синей — штриховую.

§ 1. СВОЙСТВА ПОЛНЫХ ГРАФОВ С ЦВЕТНЫМИ РЕБРАМИ

Задача 3.1. Шесть школьников участвуют в шахматном турнире, который проводится в один круг, т. е. каждый шахматист встречается со всеми участниками по одному разу. Докажите, что среди них всегда найдутся три участника турнира, которые провели уже все встречи между собой или еще не сыграли друг с другом ни одной партии.

Решение. Любые два участника турнира непременно находятся между собой в одном из двух отношений: они либо уже сыграли между собой, либо еще не сыграли.

Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа. Соединим вершины попарно ребрами двух цветов. Пусть ребро красного цвета означает, что двое уже сыграли между собой, а синего — что не сыграли. Получим полный граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов.

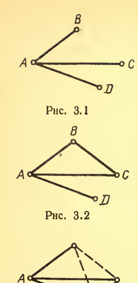


Рис. 3.1

Рис. 3.2

Рис. 3.3

Теперь для решения задачи достаточно доказать, что в таком графе обязательно найдется «треугольник» с одноцветными сторонами.

Каждая вершина нашего графа принадлежит пяти ребрам. Скольким ребрам одного цвета может принадлежать произвольная вершина такого графа? Пять принадлежащих одной вершине ребер могут быть окрашены без учета порядка следующим образом[1]: ссссс; кcccc; ккссс; кккcc; ккккс; ккккк. То есть каждая вершина принадлежит по меньшей мере трем ребрам одного цвета. Пусть, например, вершина A принадлежит трем ребрам красного цвета (рис. 3.1). Какого цвета ребра могут соединять вершины B, C и D?

Если хотя бы одно из них окажется красным, как на рисунке 3.2, то получится треугольник с красными сторонами. Если же все эти ребра синие, как на рисунке 3.3, то они вместе образуют «треугольник» с синими сторонами.

Задача решена. Рассмотрены все возможности; в каждом случае нашлись три шахматиста, или все сыгравшие между собой по одной партии, или не сыгравшие между собой ни одной партии.

Кроме того, при ее решении доказаны два свойства таких графов.

Свойство 1. Любая вершина полного графа с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов принадлежит по меньшей мере трем ребрам одного цвета.

Свойство 2. В любом полном графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

Задача 3.2. На географической карте выбраны пять городов. Известно, что среди них из любых трех найдутся два, соединенные авиалиниями, и два — несоединенные. Докажите, что тогда: 1) каждый город соединен авиалиниями непосредственно с двумя и только с двумя другими городами; 2) вылетев из любого города, можно облететь остальные, побывав в каждом по одному разу, и вернуться назад.

Решение. И в этой задаче рассматриваются множество объектов—городов и два отношения, заданные для элементов этого множества; каждые два города находятся в одном из двух отношений — они либо соединены между собой авиалиниями, либо не соединены. Пусть вершины графа соответствуют городам: красное ребро — наличию авиалинии, синее — отсутствию. По условию среди трех

[1] Красное ребро обозначим буквой к, синее — с.

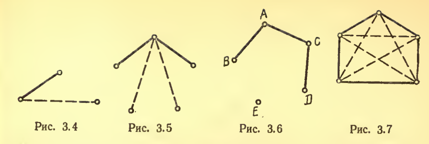


Рис. 3.4 Рис. 3.5 Рис. 3.6 Рис. 3.7

ребер, соединяющих любые три вершины, одно — красное, второе — синее (рис. 3.4), а это означает, что в графе нет ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Тогда из решения предыдущей задачи следует, что каждая вершина непременно принадлежит двум красным ребрам и двум синим (рис. 3.5), поскольку в противном случае образовался бы треугольник с одноцветными сторонами. А это и означает, что каждый город соединен авиалиниями с с двумя и только с двумя городами.

Остается показать, что в графе найдется «пятиугольник», все ребра которого — красные.

Выберем одну из вершин, например A, а красными будут, скажем, ребра (A, B) и (A, C) (рис. 3.6).

Ребро (B, C) (рис. 3.6) не может быть красным, следовательно, красным является одно из ребер: либо (C, D), либо (C, E). Пусть красное (C, D). Если теперь соединить красным ребром вершины D и B, то вершина E должна быть соединена красными ребрами с вершинами, которые принадлежат уже двум красным ребрам. По условию это невозможно. Остается соединить красными ребрами вершины D и E, B и E. Остальные ребра должны быть синими (рис. 3.7).

Итак, получим еще одно свойство.

Свойство 3. Если в полном графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов не найдется треугольника с одноцветными сторонами, то граф можно изобразить в виде «пятиугольника» с красными сторонами и синими диагоналями.

В формулировке свойства 3 можно заменить слово «красный» на «синий» и одновременно слово «синий» на «красный», то есть речь пойдет о пятиугольнике с синими сторонами и красными диагоналями. Это понятно, поскольку для пятиугольника и только для него характерно, что его диагонали образуют также пятиугольник (рис. 3.7).

Задача 3.3. В течение дня двое из шести телефонных абонентов могут, очевидно, поговорить друг с другом по телефону, а могут и не поговорить. Докажите, что всегда можно указать две тройки абонентов, в каждой из которых все переговорили друг с другом или все не переговорили.

Решение. Пусть у полного графа с шестью вершинами красные ребра соответствуют парам абонентов, которые говорили друг

с другом по телефону, синие — тем, кто не говорил. Тогда в графе найдется хотя бы один треугольник, например ABC, с одноцветными сторонами (рис. 3.8). Остается показать, что обязательно найдется еще и второй такой треугольник.

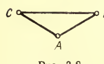


Рис. 3.8

Временно исключим из рассмотрения одну из его вершин, скажем A, вместе с ребрами, принадлежащими ей.

Найдется ли в оставшемся графе с пятью вершинами треугольник с одноцветными сторонами? Если найдется, то он содержится и в исходном графе.

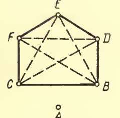


Рис. 3.9

В противном случае получается пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями (рис. 3.9). Теперь восстановим шестую вершину A с ее ребрами (рис. 3.10). Если ребро (A, D) или ребро (A, F) будет окрашено в красный цвет, то образуется еще минимум один треугольник с красными сторонами ADB или ACF. Если оба эти ребра будут синего цвета, то появится треугольник AFD с синими сторонами. Вывод нетрудно перевести с языка теории графов на язык задачи.

Установлено свойство графа, являющееся обобщением свойства 2.

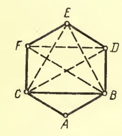


Рис. 3.10

С в о й с т в о 4. В любом полном графе с шестью или более вершинами и ребрами одного из двух цветов всегда найдутся два разных треугольника с одноцветными сторонами. Эти два треугольника могут иметь общую вершину или даже общее ребро.

Если два треугольника имеют общую вершину или ребро, то их назовем сцепленными.

Познакомимся со свойствами полного графа, ребра которого окрашены в один из трех цветов. (Каждый цвет соответствует одному из трех отношений между объектами заданного множества.)

Приведем задачу шестой международной математической олимпиады, в решении которой можно использовать графы с цветными ребрами, что существенно упростит ход рассуждений.

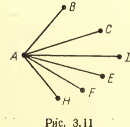


Рис. 3.11

З а д а ч а 3.4. Каждый из семнадцати ученых переписывается с остальными. В

их переписке речь идет лишь о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом лишь по одной теме. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом по одной и той же теме.

Решение. Условию задачи соответствует полный граф с семнадцатью вершинами и ребрами трех цветов. Из каждой вершины выходят шестнадцать ребер. Докажем, что в таком графе найдется хотя бы один треугольник с одноцветными сторонами. Заметим, что каждая вершина этого графа принадлежит хотя бы шести ребрам одного цвета. (Докажите это самостоятельно.) Пусть, например, вершина A принадлежит шести красным ребрам (рис. 3.11).

Если среди вершин B, C, D, E, F, H найдутся две, которые соединены красным ребром, то получится треугольник с красными сторонами. Если не найдутся, то все шесть вершин B, C, D, E, F, H соединены между собой попарно ребрами двух цветов (зеленым и синим). По теореме 3.2 в этом графе с шестью вершинами найдется хотя бы один треугольник либо с синими, либо с зелеными сторонами. Задача решена.

Сформулируем теперь свойство, доказанное при решении этой задачи.

Свойство 5. В полном графе с семнадцатью или более вершинами и ребрами трех цветов всегда найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

Заметим, что не случайно отношения, которые мы при решении задач изображали цветными ребрами, симметричны (если A друг B, то B друг A), но не обязательно транзитивны (если A друг B и B друг C, то A может и не быть другом C). В случае, когда отношение между объектами было транзитивным, то соответствующие ребра образовывали треугольник с одноцветными сторонами.

Такие отношения характерны для задач, которые можно решать с помощью графов с цветными ребрами.

Упражнения

3.1. Докажите, что в полных графах с восемью вершинами и ребрами двух цветов каждая вершина принадлежит по меньшей мере четырем ребрам одного цвета.

3.2. Все ребра полного графа с пятью вершинами окрасьте в красный или синий цвет так, чтобы не было ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Скольким красным ребрам принадлежит каждая вершина?

3.3. Докажите, что если каждый из пяти человек переписывается только с двумя другими, то не найдется трех человек, которые все переписываются между собой. Сформулируйте соответствующее свойство.

3.4. Докажите, что всегда среди шести острых углов найдутся три угла A, B, C такие, что все их попарные суммы $A+B$, $A+C$, $B+C$ одновременно либо больше 90°, либо одновременно не больше 90°.

3.5. На одном из фестивалей встретились шесть делегатов. Оказалось, что из любых троих по меньшей мере двое могут объясниться на одном из языков. Докажите, что найдутся три делегата, каждый из которых может объясниться с каждым из этой тройки. Сформулируйте соответствующее свойство графа.

3.6. Докажите, что ие найдется девяти человек таких, чтобы каждый был зиаком ровно с тремя другими.

3.7. Задано иесколько точек, некоторые из них соединены попарно отрезками. Точку назовем «особой», если более половииы ее ребер красные. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая из них и перекрашиваются все ребра, которым оиа прииадлежит (красные — в сиикй цвет, сииие—в красный). Докажите, что через коиечиое число шагов не остается ни одной особой точки.

§ 2. ГРАФЫ ПОМОГАЮТ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

Рассмотрим здесь еще несколько задач, в решении которых существенную помощь окажут графы с цветными ребрами. Эти задачи помогут обнаружить другие свойства таких графов.

Задача 3.5. В трехмерном пространстве 9 точек размещены так, что никакие три не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками прямых в точности с четырьмя другими. Докажите, что всегда найдется хотя бы один треугольник с вершинами в этих точках.

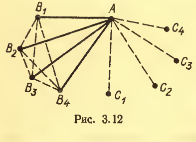


Рис. 3.12

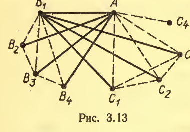


Рис. 3.13

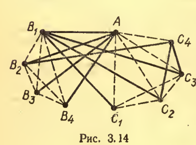


Рис. 3.14

Решение. Точкам пространства поставим в соответствие вершины графа. Проведенному отрезку поставим в соответствие красное ребро, непроведенному — синее. Докажем, что в полном графе с девятью вершинами, каждая из которых принадлежит четырем красным ребрам и четырем синим, найдется треугольник с красными сторонами.

Предположим, что нет красного треугольника. Пусть какая-нибудь вершина A соединена красными ребрами с B_1, B_2, B_3 и B_4, синими — с C_1, C_2, C_3 и C_4. Ребра вида (B_i, B_j) — синие (рис. 3.12). Каждая из вершин B_i соединена тремя красными ребрами с вершинами C_j. Два красных ребра связывают вершины вида C между собой (поскольку красных ребер (B_i, C_j) — двенадцать). Пусть B_1 связана красными ребрами с C_1, C_2 и C_3. Между собой C_1, C_2 и C_3 соединены синими ребрами, иначе образовался бы треугольник с красными сторонами (рис. 3.13). Тогда C_4 принадлежит двум красным ребрам вида (C_4, C_i), напри-

мер (C_4, C_3) и (C_4, C_2). Но C_4 принадлежит еще двум красным ребрам. Одно из них, например, (C_4, B_2) (рис. 3.14). Хотя бы одно из ребер (B_2, C_2) и (B_2, C_3) тоже красное, то есть хотя бы один из треугольников $B_2C_3C_4$ и $B_2C_2C_4$ имеет красные стороны.

Задача 3.6. Докажите, что во всякой группе из девяти человек, в которой не найдутся трое попарно незнакомых, найдутся четверо попарно знакомых.

Решение. Каждому человеку группы поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое взаимно знакомы, красное—незнакомы. По условию в графе нет ни одного треугольника с красными сторонами. Требуется доказать, что в таком графе существует четырехугольник с синими сторонами и синими диагоналями. Пусть в таком графе существует вершина A, которая принадлежит четырем или более красным ребрам: (A, B), (A, C), (A, D), (A, E). Так как красного треугольника быть не может, то вершины B, C, D и E соединены попарно синими ребрами. Искомый четырехугольник нашелся. Рассмотрим случай, когда в графе не существует вершины, принадлежащей четырем или более красным ребрам. Заметим, что из каждой вершины не может выходить в точности три красных ребра (см. упражнение 3.6). Достаточно рассмотреть случай, когда в графе существует вершина, принадлежащая двум или менее красным ребрам. Тогда эта вершина принадлежит по меньшей мере шести ребрам синего цвета. Среди шести вершин — противоположных концов этих синих ребер — найдется треугольник с одноцветными сторонами (см. свойство 2). Так как он не может быть красным, он синий.

Задача 3.7. В работе международного симпозиума лингвистов участвуют n человек. Из любых четырех один может объясниться с остальными тремя хотя бы на одном языке. Докажите, что найдется участник симпозиума, который может объясниться с каждым из остальных участников.

Решение. Имеем полный граф с n вершинами и ребрами двух цветов (синее ребро — двое могут объясниться на каком-нибудь языке, красное — не могут). По условию среди любых четырех вершин графа всегда найдется по меньшей мере одна, синяя степень которой равна трем.

Случай, когда все ребра синие, тривиален, математически неинтересен. Пусть найдется красное ребро (A, B). Добавим еще какие-нибудь две вершины C и D. Из четырех вершин A, B, C и D найдется хотя бы одна синяя, степень которой равна трем. Это C или D. Пусть, например, синюю степень три имеет C. Добавим еще одну вершину — E. Из вершин A, B, C, E или C или E имеет синюю степень, равную трем. В обоих случаях C соединена синим ребром с E. Так переберем все вершины. В итоге окажется, что C соединена синими ребрами со всеми вершинами графа. Во всякой четверке вершин, включающей A и B, есть вершина, соединенная синими ребрами со всеми остальными вершинами графа. Отсюда, кроме A

и B, существует самое большее одна вершина, не соединенная синими ребрами со всеми остальными.

Задача 3.8. В городе n жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причем среди любых троих жителей дружат либо все трое, либо только двое. Докажите, что если не все жители этого города друзья, то найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

Решение. Каждому жителю поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое дружат, а красное — враждуют. По условию в данном графе треугольники могут быть или с тремя синими сторонами, или с одной синей и двумя красными и есть хотя бы одно красное ребро. Требуется доказать, что найдется вершина, красная степень которой больше или равна синей ее степени.

Рассмотрим некоторое красное ребро (A, B). Пусть синяя степень вершины A равна k. Предположим, что $k \geqslant \frac{n}{2}$. Легко видеть, что B соединена красными ребрами с теми вершинами, с которыми A соединена синими ребрами. Поэтому, если красная степень вершины B равна l, то

$$l = k + 1 > k \geqslant \frac{n}{2}.$$

Задача 3.9. В городе n жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют. Каждый день не более чем один из них может начать новую жизнь: поссориться со всеми друзьями и подружиться со всеми врагами. Известно, что любые три жителя могут подружиться. Доказать, что все жители могут подружиться.

Решение. Каждому жителю поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое дружат, а красное — что не дружат. Получим граф с n вершинами и ребрами двух цветов, который можно подвергать следующим преобразованиям: выбирать вершину и все красные ребра, которым она принадлежит, перекрашивать в синие, а все синие — в красные. По условию каждый треугольник может стать синим, то есть в графе могут быть только или треугольники с синими сторонами, или треугольники, у которых одна сторона синяя и две — красные. (Докажите, что при преобразованиях это свойство графа не меняется.)

В любом таком графе найдется вершина, красная степень которой больше синей ее степени (см. задачу 3.8). Если каждый раз выбирать в графе вершину с наибольшей красной степенью и перекрашивать ребра, которым она принадлежит, то с каждым шагом число синих ребер будет увеличиваться. Число ребер в графе с n вершинами конечно, поэтому через конечное число шагов все ребра графа станут синими.

Упражнения

3.8. Сформулнруйте свойства полных графов с цветными ребрамн, доказанные прн решениях:

а) задачи 3.5; б) задачи 3.6; в) задачи 3.7; г) задачн 3.8; д) задачи 3.9.

3.9. Докажите, что еслн в полном графе с девятью вершинами и ребрами двух цветов нет четырехугольннка с сннними сторонами и синнмн диагоналями, то найдется треугольник с краснымн сторонамн.

3.10. 18 точек (несовпадающих) плоскости попарно соедннены либо красными, лнбо синими отрезкамн. Докажнте, что всегда найдется четырехугольник, стороны и днагонали которого одного цвета.

3.11. На некоторой планете есть 20 государств; средн любых трех нз них по меньшей мере два не установили дипломатнческие связи. (Два государства установнлн дипломатическне связн, если они обменялнсь посольствами.) Докажите, что посольств на этой планете меньше двухсот.

3.12. Последовательность $\{a_n\}$ задана с помощью рекуррентной формулы: $a_1 = 2$; $a_n = n \cdot a_{n-1} + 1$. Доказать, что в графе с $a_n + 1$ вершиной, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами[1].

§ 3. ЗАДАЧА О НЕСЦЕПЛЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ С ОДНОЦВЕТНЫМИ СТОРОНАМИ

Задача 3.5[2]. Назовем группу людей «однородной», если любая пара из этой группы психологически совместима или, напротив, любая пара психологически не совместима. Доказать, что среди 8 случайно встретившихся незнакомцев всегда найдутся две однородные группы, состоящие из трех человек каждая, причем никто из первой группы не входит во вторую.

Иначе говоря, требуется доказать, что в графе с восемью вершинами и ребрами, окрашенными в один из двух цветов, обязательно найдутся два треугольника с одноцветными сторонами, не сцепленные между собой.

Решение. Рассмотрим в графе один из треугольников KLM с одноцветными сторонами. По теореме 3.3 такой треугольник всегда найдется. Если остальные пять вершин и ребра, соединяющие их попарно, содержат еще один треугольник с одноцветными сторонами, то он и будет являться вторым искомым треугольником. (Для этого случая задача решена.) Если остальные пять вершин A, B, C, D, E не содержат треугольника с одноцветными сторонами, то они образуют пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями. На рисунке 3.15 изображены не все ребра графа, соответствующего задаче, а лишь треугольник KLM с красными сторонами и пятиугольник $ABCDE$ с красными сторонами и синими диагоналями.

Покажем, что если какая-нибудь вершина треугольника KLM соединена синими ребрами с двумя вершинами пятиугольника, взя-

[1] Задача обобщает задачн 3.1 н 3.5; она предлагалась на XIII Украннской республнканской олнмпиаде юных математнков.

[2] Эта задача более сложная, чем все остальные задачи, рассмотренные в этой главе.

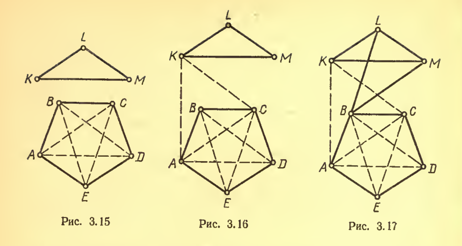


Рис. 3.15 Рис. 3.16 Рис. 3.17

тыми через одну, например K с A и C (рис. 3.16), то найдется еще один треугольник с одноцветными сторонами, не сцепленный с треугольником KAC.

Действительно, обратим внимание на пятиугольник $LMBDE$. Если он содержит треугольник с одноцветными сторонами, то второй треугольник с одноцветными сторонами, не сцепленный с первым, найден. Если не содержит, то ребра (B, L) и (B, M) красные, поскольку ребра (B, D) и (B, E) по теореме 3.3 уже синие. То есть образован треугольник BLM с красными сторонами, не сцепленный с треугольником ACK (рис. 3.17).

Остается рассмотреть случаи, когда каждая вершина треугольника KLM соединена красными ребрами по меньшей мере с тремя последовательными вершинами пятиугольника $ABCDE$. Тогда у пятиугольника найдутся две вершины, каждая из которых соеди-

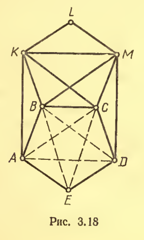


Рис. 3.18

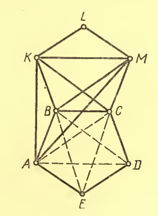


Рис. 3.19

нена красными ребрами с двумя вершинами треугольника KLM. На рисунках 3.18 и 3.19 показаны все такие случаи. На рисунке 3.15 легко обнаружить два несцепленных треугольника ABK и CDM. А на рисунке 3.19 хотя бы одно из ребер (A, L) и (C, L) должно быть красным (иначе вершина L будет соединена синими ребрами с двумя вершинами пятиугольника $ABCDE$, взятыми через одну, а этот случай уже рассмотрен). Если хотя бы одно из ребер (A, L) или (C, L) красное, то появятся треугольники CLM и ABK или треугольники AKL и BCM с красными сторонами. Таким образом, во всех случаях найдутся два несцепленных треугольника с одноцветными сторонами. Задача решена. Установлено еще одно свойство.

Свойство 6. В полном графе с восемью вершинами, ребра которого окрашены в два цвета, обязательно найдутся два треугольника с одноцветными сторонами, которые не являются сцепленными.

ГЛАВА IV

ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

В главах I—III мы выделяли графы разных видов и по разным признакам: деревья, циклы, графы с цветными ребрами, плоские, не плоские. Все они помогали нам решать различные задачи и головоломки.

В этой главе мы встретимся с задачами, решить которые все эти графы не помогут и придется вводить графы принципиально нового вида. Начнем с простейших примеров.

Схему города (расположение улиц и перекрестков) естественно рассматривать как граф с вершинами на перекрестках и поворотах, а если на улицах ввести одностороннее движение транспорта, то получим граф нового для нас вида, на ребрах которого поставлены стрелки, указывающие направление движения (рис. 4.1).

Еще пример. Пусть между несколькими командами проводится круговой турнир по баскетболу (каждая из команд играет с каждой в точности по одному разу). Ничьих в баскетболе не бывает. Если командам поставить в соответствие вершины графа и рассматривать для каждой пары команд (X, Y) отношение «команда X выиграла у команды Y», то нарисовать соответствующий граф не помогут ни цветные вершины, ни цветные ребра. И здесь нас выручат стрелки (рис. 4.2).

На рисунке 4.2 видно, что команда B выиграла все встречи; команда C проиграла все встречи; команда A выиграла у C и D и проиграла B и E.

§ 1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Ребро графа называется ориентированным, если одну вершину считают началом ребра, а другую — концом.

На рисунке ориентированное ребро изображают стрелкой[1] (рис. 4.3). В тексте ориентированное ребро с началом в A и концом в B будем обозначать $<A; B>$. Говорят, что ориентированное ребро $< A; B >$ выходит из A и входит в B.

Граф, все ребра которого ориентированы, называется ориентированным графом.

Ориентированный граф изображен на рисунке 4.4.

Одна и та же вершина ориентированного графа может служить

[1] Такую «стрелку» называют еще дугой.

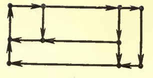


Рис. 4.1

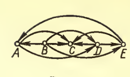


Рис. 4.2

началом для одних ребер и концом для других. Соответственно различают две степени вершины: степень выхода и степень входа.

Степенью выхода вершины A ориентированного графа называется число выходящих из A ребер (обозначение: степ.вых.A).

Степенью входа вершины A ориентированного графа называется число входящих в A ребер (обозначение: степ.вх.A).

Пример. В графе на рисунке 4.4:
степ.вых.$D = 3$; степ.вх.$D = 0$;
степ.вых.$C = 0$; степ.вх.$C = 3$;
степ.вых.$F = 0$; степ.вх.$F = 0$.

В ориентированных графах в зависимости от сочетания степеней входа и выхода для данной вершины будем рассматривать три частных случая.

Изолированной вершиной называется вершина, у которой и степень входа и степень выхода равны 0.

Источником называется вершина, степень выхода которой положительна, а степень входа равна 0.

Стоком называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна 0.

На рисунке 4.4 вершина F — изолированная, D — источник, C — сток.

Путем в ориентированном графе Γ от A_1 до A_n называется последовательность ориентированных ребер $<A; A_2>$, $<A_2; A_3>$, ..., $<A_{n-1}; A_n>$, такая, что конец каждого предыдущего ребра совпадает с началом следующего и ни одно ребро не встречается более одного раза.

Если в ориентированном графе Γ нашелся путь от A до B, то обратного пути от B к A может и не быть (рис. 4.5)[1].

[1] Напомним, что в графах с неориентированными ребрами при наличии пути от A до B существует всегда, очевидно, и путь от B до A (глава I, § 2).

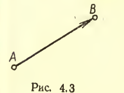


Рис. 4.3

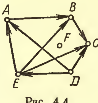




Рис. 4.4

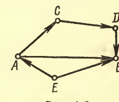


Рис. 4.5

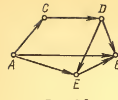


Рис. 4.6

Если существует ориентированный путь от A до B, то говорят, что B *достижима* из A.

В графе Г на рисунке 4.5 B достижима из A, A не достижима из B.

Простым путем в ориентированном графе называется путь, в котором ни одна вершина не содержится более одного раза.

Замкнутый путь в ориентированном графе называется ориентированным циклом.

Длиной пути называется число ребер в этом пути.

Расстоянием от A до B в ориентированном графе называется длина наикратчайшего пути от A до B. Если пути от A до B не существует, то расстояние от A до B называют бесконечным и обозначают ∞. Расстояние от A до B будем обозначать $S(AB)$.

Для графа на рисунке 4.5

$$S(AB) = 1, \quad S(CB) = 2, \; S(BC) = \infty.$$

Упражнения

4.1. В графе на рисунке 4.5:

а) определите степень входа и степень выхода каждой вершины;

б) найдите источник, сток;

в) определите число путей от E до C;

г) определите расстояние от E до C;

д) назовите вершину, которая не достижима ни из одной вершины графа.

4.2. Подсчитайте, сколько путей в графе Г от A до B на рисунке 4.6. Определите расстояние от A до B, от C до A, от A до C.

4.3. Нарисуйте граф Г с пятью вершинами, который:

а) имеет 2 стока и один источник;

б) не имеет ни стока, ни источника.

4.4. Докажите, что в ориентированном графе с n вершинами (A_1, A_2, ..., A_n) и p ребрами:

а) степ.вх. A_1 + степ.вх. A_2 + ... + степ.вх. $A_n = p$;

б) степ.вх. A_1 + степ.вх. A_2 + ... + степ.вх. A_n = степ. вых. A_1 + степ.вых. A_2 + ... + степ.вых. A_n.

4.5. Докажите, что если в ориентированном графе вершина B достижима из A, а вершина C достижима из B, то $S(AC) \leqslant S(AB) + S(BC)$[1].

§ 2. ПОЛНЫЙ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ

Полным ориентированным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одним ориентированным ребром[2].

На рисунке 4.7 полный ориентированный граф с пятью вершинами.

[1] Это утверждение аналогично утверждению евклидовой геометрии о том, что длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон.

[2] Если с каждого ребра полного ориентированного графа снять направление, то образуется полный граф с неориентированными ребрами.

Упражнения

4.6. Докажите, что граф на рисунке 4.2 является полным ориентированным графом.

4.7. Почему граф на рисунке 4.6 не является полным ориентированным графом?

4.8. Нарисуйте полный ориентированный граф с шестью вершинами.

Приведем примеры использования полных ориентированных графов.

Рис. 4.7

1. КРУГОВЫЕ БЕСКОМПРОМИССНЫЕ ТУРНИРЫ

Напоминаем, что соревнование, в котором каждая из команд играет с каждой из остальных команд в точности по одному разу, называют *круговым* турниром или турниром в один круг.

Если каждая встреча оканчивается непременно выигрышем одной из команд, то круговой турнир называют *бескомпромиссным*. Круговой бескомпромиссный турнир проводится, например, в волейболе и баскетболе. Поскольку далее будем рассматривать исключительно бескомпромиссные круговые турниры и не возникнет опасности спутать их с каким-либо другим видом турниров, то станем такое соревнование называть сокращенно турниром. Каждому турниру соответствует полный ориентированный граф, в котором вершины представляют команды, а каждое ориентированное ребро $<A; B>$ выражает отношение «A победила B». Степень выхода любой вершины A есть число побед, одержанных командой A.

На рисунке 4.8 изображены все турниры с двумя, тремя и четырьмя участниками.

Упражнения

4.9. Турнир проводится среди n команд. Сколько команд могут пройти:
а) без единого поражения;
б) без единой победы?

4.10. Докажите, что в полном ориентированном графе может существовать самое большее один источник.

4.11. Докажите, что в полном ориентированном графе может существовать самое большее один сток.

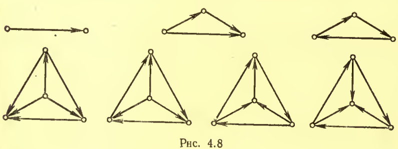


Рис. 4.8

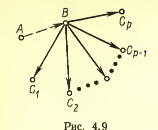


Рис. 4.9

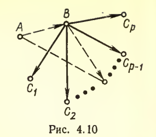


Рис. 4.10

Решим теперь более сложные задачи и выведем некоторые свойства полных ориентированных графов.

З а д а ч а 4.1. Турнир по волейболу проводится между n командами. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали в турнире одинаковое число побед, то найдутся среди участников три команды I, II, III такие, что I выиграла у II, II выиграла у III, а III выиграла у I.

Р е ш е н и е. Пусть A и B — две команды, одержавшие одинаковое число побед, например, p побед. Пусть к тому же A выиграла у B. Те p команд, у которых выиграла команда B, обозначим C_1, C_2, ..., C_p (рис. 4.9).

Команда A не могла одержать победы над всеми командами из числа C_1, C_2, ..., C_p, так как иначе она одержала бы больше, чем p побед.

Следовательно, среди команд C_1, C_2, ..., C_p найдется хотя бы одна, которая одержала победу над A (рис. 4.10). Стрелку от нее направим к A. Путь замкнется.

Сформулируем полученный результат на языке графов.

Т е о р е м а 4.1. *Если в полном ориентированном графе с n вершинами хотя бы две вершины имеют одинаковые степени выхода, то в этом графе найдутся 3 такие вершины, что ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл.*

З а д а ч а 4.2. Турнир между n шахматистами закончился без ничьих. Можно ли пронумеровать всех участников в таком порядке, чтобы оказалось, что каждый выиграл партию у шахматиста, имеющего номер на единицу больше?

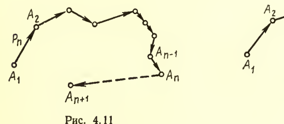


Рис. 4.11

Рис. 4.12

Решение. Достаточно выяснить, что всякий полный ориентированный граф с n вершинами имеет простой путь, проходящий через все вершины графа.

Доказательство проведем методом математической индукции по числу вершин графа.

Для $n = 2$ утверждение верно. Теперь предположим, что в любом полном ориентированном графе Г с n вершинами найдется простой путь, проходящий через все вершины графа. Обозначим его $p_n = <A_1; A_2>, <A_2; A_3>, \ldots, <A_{n-1}; A_n>$. Добавим теперь произвольную вершину A_{n+1} и ребра, соединяющие ее со всеми остальными вершинами графа Г.

Если ребро, соединяющее A_{n+1} и A_n, направлено от A_n к A_{n+1}, то пройден путь p_n до A_{n+1} (рис. 4.11).

Если ребро направлено от A_{n+1} к A_n, то рассмотрим последовательность ребер, соединяющих A_{n+1} с A_{n-1}, A_{n-2}, ..., A_2, A_1. Если все ребра направлены от A_{n+1}, то к пути p_n можно добавить ребро $<A_{n+1}; A_1>$.

Если они не все выходят из A_{n+1}, то возьмем первое ребро этой последовательности, входящее в A_{n+1}. Пусть это будет ребро $<A_k; A_{n+1}>$ (рис. 4.12). Прервем путь p_n в A_k и продолжим его по ребрам $<A_k; A_{n+1}>$, $<A_{n+1}; A_{k+1}>$, после чего вновь вернемся к прежнему маршруту, то есть искомый путь будет следующим: $<A_1; A_2>, \ldots, <A_k; A_{n+1}>, <A_{n+1}; A_{k+1}>, <A_{k+1}; A_{k+2}>, \ldots, <A_{n-1}; A_n>$.

По принципу математической индукции утверждение верно для всякого натурального n.

А раз есть такой путь в графе, следовательно, всех игроков можно будет пронумеровать так, чтобы оказалось, что каждый выиграл партию у шахматиста, имеющего номер на единицу меньше.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.2. *Всякий полный ориентированный граф с n вершинами имеет простой ориентированный путь, проходящий через все вершины графа.*

Упражнение

4.12. Закончился круговой турнир баскетболистов.

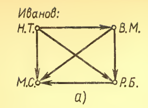
1) Укажите правило, по которому можно пронумеровать все команды так, чтобы каждая одержала победу над следующей за ней в этом списке.

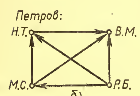
2) Всегда ли такой порядок будет показывать расположение команд по набранным очкам?

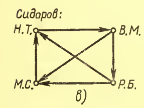
3) Единственным ли образом можно провести такую нумерацию?

2. ПАРАДОКСЫ «ГОЛОСОВАНИЯ С ПРЕДПОЧТЕНИЕМ»

Полные ориентированные графы помогут выявить особенности ситуации, которая встречается довольно часто, но закономерности ее обычно остаются незамеченными.







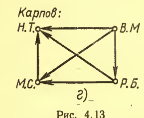


Рис. 4.13

Допустим, что четырем учащимся (Иванову, Петрову, Сидорову и Карпову) поручено от имени класса выбрать подарок девочке Кате на день рождения (Карпов — староста класса, в случае равного разделения голосов его голос решающий). После долгих споров ребята остановились на четырех предметах:

ракетка для игры в бадминтон — Р. Б.;

волейбольный мяч — В. М.;

набор для игры в настольный теннис — Н. Т;

морская свинка — М. С.;

При обсуждении выяснилось, что по отношению к этим предметам у каждого из ребят своя система предпочтений. Системы эти представляют собой полные ориентированные графы с четырьмя вершинами (рис. 4.13).

Стрелка от одной вершины к другой обозначает, что первая вершина предпочтительнее второй. Например, стрелка от В. М. к Р. Б. на рисунке 4.13 (а) обозначает, что Иванов при сравнении волейбольного мяча и ракетки бадминтона предпочитает волейбольный мяч.

По рисункам читаем, что Иванов наибольшее предпочтение отдает настольному теннису. Петров — ракетке для бадминтона, Карпов — волейбольному мячу, Сидоров не отдает большего предпочтения ни одному из четырех предметов.

Ребята договорились о системе выбора подарка, которая на первый взгляд не вызывает возражений. Было решено выбирать большинством голосов (каждый голосует в соответствии со своими предпочтениями) один из двух предметов в следующем порядке:

1) либо В. М., либо Р. Б.;

2) либо предмет, получивший большинство голосов на первом шаге голосования, либо Н. Т.;

3) либо предмет, получивший большинство голосов на втором шаге голосования, либо М. С.

Какой же подарок они должны выбрать при этой системе голосования?

Следим по графам на рисунке 4.13. На первом шаге при сравнении В. М. и Р. Б. большинством голосов (Иванов, Сидоров и Карпов) должны были выбрать В. М.

На втором шаге при сравнении В. М. и Н. Т. большинством голосов (Иванов, Петров и Сидоров) должны были выбрать Н. Т.

На третьем шаге при сравнении Н. Т. и М. С. большинством голосов (Петров, Сидоров и Карпов) должны были выбрать М. С.

Неожиданно получается, что четверо выбирают в подарок морскую свинку, хотя ни один из них не отдавал этому подарку большего предпочтения.

В структуре такого голосования все решил порядок, в котором сравнивались пары предметов. Чем позже предмет участвует в выборе, тем выше его шансы быть выбранным.

Если бы, например, Иванов вник в особенности системы голосования с предпочтением и ему очень хотелось бы подарить Кате набор для игры в настольный теннис, то он предложил бы товарищам изменить порядок сравнения пар предметов так, чтобы настольный теннис рассматривался только в последней паре. Тогда, какие бы пары ни сравнивались на I и II этапах голосования, будет выбран набор для настольного тенниса.

Упражнение

4.13. Проверьте, смог ли бы Иванов так изменить порядок сравнения пар предметов, чтобы при голосовании с предпочтением был выбран в подарок набор для настольного тенниса.

В этой главе рассматривались главным образом полные ориентированные графы. В дальнейшем мы неоднократно будем сталкиваться с ориентированными графами, но чаще это будут неполные графы.

ГЛАВА V

ОТНОШЕНИЯ

Что характерно для всех задач, которые решаются с помощью графов?

В каждой задаче I, II, IV глав рассматривались элементы какого-то множества и некоторое отношение для пар элементов этого множества. Это отношение «быть связанными шоссейной дорогой» на множестве населенных пунктов; отношение «быть заказанными на обед» на множестве блюд в меню; отношение «быть знакомым» на множестве людей и другие.

В задачах главы III («Графы с цветными ребрами») задавалось множество и выделялось одно или несколько отношений между элементами этого множества. Например, два отношения «сыграть партию» и «не сыграть партию» — на множестве шахматистов турнира; два отношения — «иметь телефонный разговор» и «не иметь телефонного разговора» — на множестве абонентов; три отношения — «вести переписку по теме I», «вести переписку по теме II», «вести переписку по теме III» — на множестве ученых. Каждому из отношений на рисунке графа соответствовали ребра одинакового цвета. Если были заданы два отношения, то ребра графа были двух цветов, если три, то ребра графа были трех цветов. Элементы множества изображались вершинами графа, а отношения пар элементов — множеством ребер или стрелок графа.

В алгебре вводятся отношения «быть равным», «быть больше», «быть не больше», «быть делителем», «быть делимым» и другие на множестве чисел.

В геометрии используются отношения «быть параллельной», «быть перпендикулярной» на множестве прямых и плоскостей, «быть конгруэнтной», «быть подобной» на множестве фигур и другие.

В быту мы встречаемся с отношениями «быть родственником», «быть сестрой», «быть отцом», «быть старше», «быть другом», «быть одноклассником», «быть руководителем» и т. п. на множестве людей.

Отношения на множестве элементов могут задаваться разными способами: словесным описанием, таблицами, стрелками, отрезками.

Будем считать, что для элементов некоторого множества M задано отношение, если про любые два элемента этого множества известно, находятся они в этом отношении или не находятся.

Понятие «отношение» является одним из исходных понятий в математике, то есть таких, с помощью которых строятся другие понятия. Введение этого понятия наглядно иллюстрируется с помощью понятия «квадрат множества».

§ 1. КВАДРАТ МНОЖЕСТВА

Элементы a и b (на рисунке они могут изображать вершины графа) некоторого множества, взятые в определенном порядке, называют *упорядоченной парой*.

Обозначают ее $< a;\ b >$. Возможны и такие пары, в которых оба элемента совпадают, то есть пары вида $< a;\ a >$. Упорядоченные пары $<a;\ b>$ и $<b;\ a>$ считаются различными, если $a \neq b$. Две упорядоченные пары $<a;\ b>$ и $<c;\ d>$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Из элементов всякого множества M всегда можно образовать множество всевозможных упорядоченных пар вида $<a;\ b>$, где a и b принадлежат M[1].

Пример 1. $M = \{a, b; c\}$. Выпишем всевозможные пары элементов этого множества. В этом нам поможет таблица на рисунке 5.1. Выпишем «координаты» всех выделенных точек последовательно снизу вверх и слева направо, то есть $\{<a;\ a>;\ <a;\ b>;\ <a;\ c>;\ <b;\ a>;<b;\ b>;\ <b;\ c>;\ <c;\ a>;\ <c;\ b>;\ <c;\ c>\}$.

Множество всевозможных пар элементов множества M называется *квадратом множества* M; его принято обозначать $M \times M$ или M^2.

Пример 2. $M = \{1,\ 2;\ 3;\ 4\}$. По таблице на рисунке 5.2 выписываем элементы множества M^2:

$$M^2 = \{<1;1>;\ <1;2>;\ <1;3>;\ <1;4>;\ <2;1>;\ <2;2>;\ <2;3>;\ <2;4>;\ <3;1>;\ <3;2>;\ <3;3>;\ <3;4>;\ <4;1>;\ <4;2>;\ <4;3>;\ <4;4>\}.$$

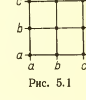


Рис. 5.1

Упражнения

5.1. $M = \{0;\ 2;\ 5;\ 7\}$. По таблице на рисунке 5.3 выпишите все элементы множества M^2.

5.2. $M = \{b;\ c;\ d;\ k\}$. Постройте таблицу для M^2 и выпишите все элементы множества M^2.

Каждое отношение из множества элементов M можно задать, выделив определенное подмножество пар из множества M^2.

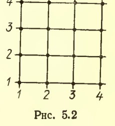


Рис. 5.2

[1] В главе V будем рассматривать только упорядоченные пары, поэтому для удобства вместо термина «упорядоченная пара» будем использовать термин «пара».

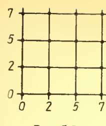


Рис. 5.3

Пример 3. Снова рассмотрим множество $M = \{0;\ 2;\ 5;\ 7\}$ и его квадрат (рис. 5.3):

$M^2 = \{<0; 0>;\ <0; 2>;\ <0; 5>;\ <0; 7>;\ <2; 0>;<2; 2>;\ <2; 5>;\ <2; 7>;\ <5; 0>;\ <5; 2>;\ <5; 5>;\ <5; 7>;\ <7; 0>;\ <7; 2>;\ <7; 5>;\ <7; 7>\}$.

Из множества M^2 выделим подмножество R тех пар $<A;\ B>$, в которых $A > B$. На рисунке 5.4 точки, соответствующие таким парам, обведены кружками. Выпишем эти пары:

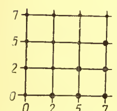


Рис. 5.4

$R = \{<2; 0>;\ <5; 0>;\ <5; 2>;\ <7; 0>;\ <7; 2>;\ <7; 5>\}$. Множество определяет отношение «больше» для элементов множества M. Граф, соответствующий этому отношению на множестве M, изображен на рисунке 5.5. Здесь каждая стрелка направлена от большего числа к меньшему.

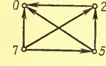


Рис. 5.5

Пример 4. Пусть теперь M — множество детей у одних родителей: $M = \{$Коля; Саша; Вера$\}$. Рассмотрим отношение «быть братом» на множестве M. Выпишем те пары $<A;\ B>$ элементов из M, в которых A является братом B. Это множество $R = \{<$Коля; Вера$>$; $<$Коля; Саша$>$; $<$Саша; Вера$>$; $<$Саша; Коля$>\}$.

Множество R является подмножеством квадрата множества M, то есть $R \subset M^2$. Таблица, соответствующая отношению «быть братом» на множестве M, дана на рисунке 5.6, а граф — на рисунке 5.7.

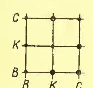


Рис. 5.6

Вершины C и K в графе пришлось соединить двумя ориентированными ребрами $<K;\ C>$ и $<C;\ K>$, так как и Коля брат Саши, и Саша брат Коли. Такие ориентированные ребра называются ребрами противоположной ориентации.

Во всех приведенных примерах каждое отношение на множестве M выделяет некоторое подмножество из M^2.

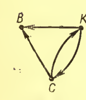


Рис. 5.7

Таким образом, задание отношения на множестве M — это задание некоторого подмножества из M^2.

В свою очередь, всякое подмножество R из M^2 задает отношение на множестве M. Выбор подмножества R в M^2 определяет, какие пары элементов находятся в отношении R.

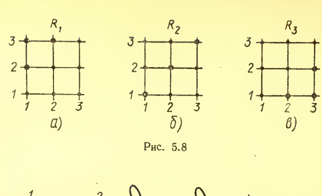


Рис. 5.8

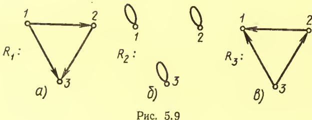


Рис. 5.9

Если элемент A из множества M находится в отношении R с элементом B из M, то есть пара $<A; B> \in R$, то будем писать ARB. Читается это так: «A находится в отношении R с B».

Для примера 3 выражение $7R5$ означало, что $7 > 5$, для примера 4 выражение КRВ означало, что Коля — брат Веры.

Обратите внимание на то, что каждое отношение R рассматривается только вместе с некоторым множеством M.

Пример 5. Рассмотрим три отношения R_1, R_2 и R_3, заданные на одном и том же множестве $M = \{1; 2; 3\}$:

$$M^2 = \{<1; 1>; <1; 2>; <1; 3>; <2; 1>; <2; 2>; <2; 3>; <3; 1>; <3; 2>; <3; 3>\}.$$

1) Пусть отношение R_1 содержит те пары $<A; B>$ из M^2, для которых $A < B$. В этом случае $R_1 = \{<1; 2>; <1; 3>; <2; 3>\}$ (рис. 5.8 а).

2) Пусть отношение R_2 содержит те пары $<A; B>$ из M^2, для которых $A = B$. В этом случае $R_2 = \{<1; 1>; <2; 2>; <3; 3>\}$ (рис. 5.8 б).

3) Пусть отношение R_3 содержит те пары $<A; B>$ из M^2, для которых $A > B$. В этом случае $R_3 = \{<3; 1>; <3; 2>; <2; 1>\}$ (рис. 5.8 в).

Графы, соответствующие отношениям R_1, R_2, R_3 на множестве элементов M, изображены на рисунке 5.9.

Ребро называется петлей, если обе его вершины совпадают.

Все ребра графа, соответствующего отношению R_2, являются петлями.

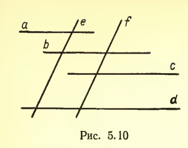


Рис. 5.10

Обратите внимание на то, что $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = M^2$ и что эти три отношения R_1, R_2 и R_3 разбили множество M^2 на три непересекающихся подмножества.

Пример 6. Множество упорядоченных пар $R = \{<3; 5>; <8; 4>; <3; 2>; <4; 4>\}$ есть тоже некоторое отношение на множестве $M = \{2; 3; 4; 5; 8\}$.

Упражнения

5.3. На множестве $M = \{1; 2; 3\}$ задается отношение R = «быть не больше». Выпишите элементы множества R. Постройте соответствующую таблицу и нарисуйте граф.

5.4. На множестве $M = \{2; 3; 4; 7\}$ задается отношение «быть не меньше». Выпишите элементы множества R. Постройте соответствующую таблицу и нарисуйте граф.

5.5. $M = \{-5; 0; 2; 6; 7\}$. Нарисуйте граф, соответствующий отношению:
а) «быть $>$» на M;
б) «быть $<$» на M;
в) «быть $\geqslant$» на M;
г) «быть $\leqslant$» на M.

5.6. На множестве прямых $M = \{a; b; c; d; e\}$ (рис. 5.10) задано отношение R «быть параллельной». Выпишите элементы множества R. Постройте соответствующую таблицу и нарнсуйте граф.

§ 2. СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ

Рассмотрим некоторые важные свойства отношений.

1. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ

На практике часто встречаются отношения R, в которых каждый элемент из рассматриваемого множества находится в отношении R к самому себе.

Так, каждое число равно самому себе, каждое число само на себя делится, каждый человек сам себе родственник, каждый человек сам на себя похож.

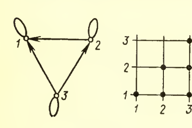


Рис. 5.11

Отношение R называется рефлексивным на множестве M, если для всякого $A \in M$ пара $<A; A> \in R$, то есть для всякого A верно ARA.

Граф, соответствующий рефлексивному отношению, в каждой вершине имеет петлю, а соответствующая таблица имеет выделенные точки на «главной диагонали».

К числу рефлексивных отношений относятся и следующие: «быть не больше» ($A \leqslant B$), «быть не меньше» ($A \geqslant B$) на множестве чисел; «иметь общий признак c» на множестве геометрических фигур; «быть одноклассником c» на множестве людей.

На рисунке 5.11 граф и таблица рефлексивного отношения $A \geqslant B$, где $A, B \in M = \{1; 2; 3\}$.

2. АНТИРЕФЛЕКСИВНОСТЬ

Отношение R называют антирефлексивным на множестве M, если ни для какого элемента A из M не выполняется отношение ARA.

Примеры антирефлексивных отношений:

«быть больше» ($A > B$), «быть меньше» ($A < B$) на множестве чисел; отношение «быть перпендикулярной» ($a \perp b$) на множестве прямых; «быть старше», «быть дедом», «быть отцом» на множестве людей.

Граф, соответствующий антирефлексивному отношению, не имеет ни одной петли, а соответствующая таблица не имеет «выделенных» точек на «главной диагонали».

Графы антирефлексивных отношений «быть меньше» и «быть больше» на множестве $M = \{1; 2; 3\}$ даны на рисунке 5.9 (а, в), соответствующие таблицы на рисунке 5.8 (а, в).

Конечно, существуют отношения, которые не являются ни рефлексивными, ни антирефлексивными.

Графы таких отношений имеют и вершины с петлями, и вершины без петель одновременно (рис. 5.12).

Рис. 5.12

Примером может служить отношение «быть другом» на множестве людей, среди которых есть люди, являющиеся другом себе, и есть такие, которые, например, курят. Курящий человек, конечно, не является себе другом.

Примерами такого отношения в математике служат, например, следующие:

1. $M = \{0; 1; 2; 4; 16; 3; 9\}$. Пусть aRb означает «a есть корень квадратный из b» (рис. 5.12).
2. $M = \{-1; 0; 1; 2; 4; 5; 25\}$. Пусть aRb означает «a есть квадрат b» (рис. 5.13).

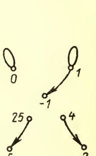
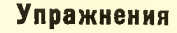


Рис. 5.13



Упражнения

5.7. Нарисуйте граф с шестью вершинами, соответствующий:

а) рефлексивному отношению;
б) антирефлексивному отношению;
в) отношению не рефлексивному и не антирефлексивному.

5.8. Нарисуйте граф и постройте таблицу, соответствующие отиошеиию «быть $\leqslant$» иа множестве $M = \{2; 4; 7; 10\}$.

5.9. Приведите два примера рефлексивных отиошений. Нарнсуйте соответствующие графы.

5.10. Приведите два примера антирефлексивиых отиошеиий. Постройте соответствующие графы.

5.11. Приведите пример отиошеиия, не являющегося ии рефлекснвным, ии витирефлексивным.

3. СИММЕТРИЧНОСТЬ

Отношение R называется симметричным на множестве M, если для каждой пары A и B элементов M из ARB следует BRA.

Таково, например, отношение «быть параллельной» на множестве прямых (если $A \parallel B$, то и $B \parallel A$), «быть равным» на множестве чисел (если $A = B$, то и $B = A$).

Симметричными являются отношения «быть похожим» на множестве людей, «быть перпендикулярной» на множестве прямых, «быть подобной» на множестве геометрических фигур.

Если в графе симметричного отношения есть ориентированное ребро $<A; B>$, то должно быть и ребро $<B; A>$.

Часто вместо двух ребер противоположной ориентации $<A; B>$ и $<B; A>$ рисуют одно неориентированное ребро. Так было в задачах и теоремах I—III глав. Все отношения, которые там рассматривались, были симметричными.

Рассмотрим множество прямых $M = \{a; b; c; d\}$ (рис. 5.14) и отношение «быть перпендикулярной» на M. Это отношение антирефлексивно и симметрично. Соответствующие граф и таблица приведены на рисунке 5.15.

Упражнения

5.12. Нарисуйте какой-нибудь грвф симметричного отношения, заданного на множестве M из шести элемеитов.

5.13. Приведите два примера отиошеиий, являющихся симметричиыми. Нарисуйте соответствующие графы.

5.14. Приведите два примера отиошений, не являющихся симметричиыми. Нарисуйте соответствующие графы.

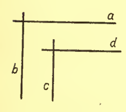
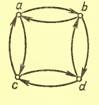


Рис. 5.14



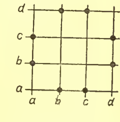


Рис. 5.15

4. АНТИСИММЕТРИЧНОСТЬ

Отношение R называется антисимметричным на множестве M, если для несовпадающих элементов A и B из ARB следует не BRA, то есть если $A \neq B$ и пара $<A; B>$ принадлежит R, то пара $<B; A>$ не принадлежит R.

Если граф антисимметричного отношения имеет ребро $<A; B>$, то он не может содержать ребро $<B; A>$.

Антисимметричными являются отношения: $A > B$, $A \geqslant B$ на числовых множествах; «быть племянником», «быть дядей», «быть мужем», «быть женой» и т. п. на множестве людей; «быть больше» на множестве углов и т. д.

В определении антисимметричного отношения ничего не говорится о равных элементах, это означает, что антисимметричное отношение R может содержать пары вида $<A; A>$, может и не содержать таких пар. То есть граф антисимметричного отношения может иметь петли, может и не иметь их.

Упражнения

5.15. Нарисуйте граф, соответствующий антисимметричному отношению, с шестью вершинами и девятью ребрами.

5.16. Приведите два примера антисимметричных отношений.

5.17. Нарисуйте граф и таблицу отношения «быть племянником» на какомнибудь множестве ваших родственников. Определите свойства этого отношения.

Уже говорилось о том, что с понятием отношения R неразрывно связывается множество M, пары элементов которого связаны отношением R. (Понятие отношения без множества, на котором оно задается, в математике не рассматривается.) Часто бывает так, что отношения, носящие одно и то же название, обладают разными свойствами из-за того, что рассматриваются на разных множествах.

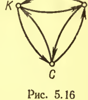


Рис. 5.16

Примеры

1. R_1—«быть братом» на множестве $M=\{$Коля; Вова; Саша$\}$, где Коля, Вова и Саша — дети одних родителей. Отношение R_1 антирефлексивно и симметрично (рис. 5.16).



Рис. 5.17

2. R_2 — «быть братом» на множестве $M_2=\{$Коля; Оля$\}$, где Коля и Оля — дети одних родителей. Отношение R_2 антирефлексивно и антисимметрично (рис. 5.17).

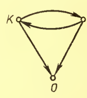


Рис. 5.18

3. R_3 — «быть братом» на множестве $M_3 = \{$Коля; Саша; Оля$\}$, где Коля, Саша и Оля — дети одних родителей.

R_3 — антирефлексивно, не симметрично и не антисимметрично (рис. 5.18).

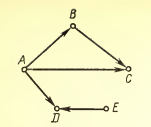
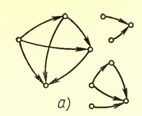
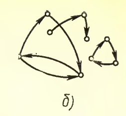


Рис. 5.19





Рнс. 5.20

Последний пример показывает, что существуют отношения, которые не являются ни симметричными, ни антисимметричными. Графы таких отношений должны иметь хотя бы две вершины A и B, соединенные между собой как ребром $<A;\ B>$, так и ребром $<B;\ A>$, и хотя бы две вершины, соединенные между собой только одним ориентированным ребром.

Упражнения

5.18. Приведите прнмеры такнх отиошеннй R_1, R_2 и R_3 с одииаковым названием, но заданных на трех разных множествах M_1, M_2, M_3 прнчем таких, чтобы:

а) отношенне R_1 на M_1 было снмметричным;

б) отношение R_2 на M_2 было антиснмметричным;

в) отношенне R_3 на M_3 не было нн снмметрнчным, ни антнсимметрнчным.

Нарисуйте соответствующне графы и постройте таблицы.

5. ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Отношение R называется транзитивным на множестве M, если для любых трех элементов A, B и C, принадлежащих M, из ARB и BRC следует ARC.

Если граф транзитивного отношения содержит ребра $<A;\ B>$ и $<B;\ C>$, то он должен содержать и «замыкающее» ребро $<A;\ C>$ (рис. 5.19).

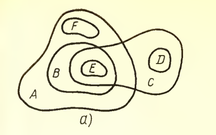
Транзитивными отношениями являются: «$A > B$», «$A \geqslant B$», «$A < B$», «$A \leqslant B$» на множестве чисел, «$A \parallel B$» на множестве прямых, отношение конгруэнтности на множестве геометрических фигур.

Графы транзитивных отношений приведены на рисунках 5.19 и 5.16.

Упражнения

5.19. На рнсуике 5.20 дан граф. Определнте, обладает лн соответствующее отношенне свойством транзнтивиостн.

5.20. Постройте граф с шестью вершниами, соответствующий транзнтивному отиошенню.



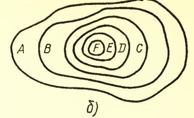


Рис. 5.21

5.21. A, B, C, D, E, F — некоторые множества (рис. 5.21). Они рассматриваются как элементы множества M, то есть $M = \{A; B; C; D; E; F\}$. R — отношение на M — «быть подмножеством», то есть BRA означает, что $B \subset A$. Постройте граф отношения «быть подмножеством» на M. Определите свойства R на M.

6. АНТИТРАНЗИТИВНОСТЬ

Отношение R на множестве M называется антитранзитивным, если для любых трех элементов A, B и C из ARB и BRC следует не ARC.

Примером антитранзитивного отношения может служить отношение перпендикулярности прямых на плоскости (рис. 5.22). Граф и таблица отношения перпендикулярности для этих прямых приведены на рисунке 5.23. Это отношение антирефлексивно, симметрично и антитранзитивно.

К антитранзитивным отношениям принадлежат и такие: «быть матерью», «быть отцом», «быть сыном», «быть дочерью», «быть дядей», «быть дедом» и т. п. на множестве людей.

Если в графе антитранзитивного отношения для каких-то трех вершин A, B и C существуют ориентированные ребра $\langle A; B \rangle$ и $\langle B; C \rangle$, то не может быть ребра $\langle A; C \rangle$.

Наряду с транзитивными и антитранзитивными отношениями существуют и такие, которые не являются ни транзитивными, ни антитранзитивными.

Таким отношением служит отношение «быть другом» или «быть знакомым» на некоторых множествах людей (рис. 5.24).

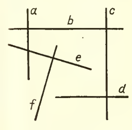


Рис. 5.22

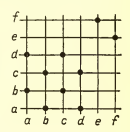


Рис. 5.23

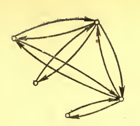


Рис. 5.24

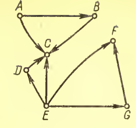


Рис. 5.25

Упражнения

5.22. Какие ребра графа на рисунке 5.25 необходимо удалить, чтобы граф соответствовал антитранзитивному отношению?

5.23. Постройте граф с шестью вершинами, такой, чтобы соответствующее отношение было антитранзитивным.

5.24. Приведите примеры двух антитранзитивных отношений. Постройте соответствующие графы.

7. ПОЛНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Отношение R называется полным на множестве M, если для всякой пары несовпадающих элементов A и B, принадлежащих M, по меньшей мере одно из двух отношений ARB или BRA имеет место.

В графе полного отношения каждая пара вершин соединена хотя бы одной стрелкой.

Графы полных отношений изображены на рисунках 5.16, 5.17, 5.18.

Если в отношении R найдется хотя бы одна пара элементов, которые не связаны отношением R, то такое отношение называется неполным.

Графы неполных отношений изображены, например, на рисунках 5.25, 5.24 и 5.23.

Если рассматривать отношение «быть членом одной семьи» на множестве людей, живущих в одной квартире, то для квартиры, где живет одна семья, это отношение полное, а для квартиры, в которой живут несколько семей, это отношение чаще бывает неполным.

Конкретное отношение может обладать некоторыми комбинациями свойств.

Примеры

1. Отношение «A делится на B без остатка» на множестве $M = \{2;\ 4;\ 8;\ 16\}$ — рефлексивное, антисимметричное, транзитивное и полное (рис. 5.26).

2. Отношение «A делится на B без остатка» на множестве $M = \{2;\ 4;\ 8;\ 10\}$ — рефлексивное, антисимметричное, транзитивное, неполное (рис. 5.27).

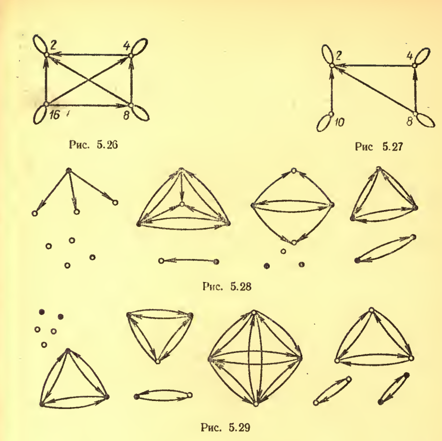


Рис. 5.26

Рис 5.27

Рис. 5.28

Рис. 5.29

3. Граф отношения R «быть сестрой» на некотором множестве людей M изображен на рисунке 5.28 (незаштрихованными кружками отмечены люди мужского пола, а заштрихованными — женского). По графу определяем, что R на множестве M антирефлексивное, не симметричное, не антисимметричное, транзитивное, неполное.

4. Граф отношения R «быть братом или сестрой» на некотором множестве людей M изображен на рисунке 5.29 (здесь незаштрихованные вершины — люди мужского пола, заштрихованные — женского). Видим, что R на множестве M антирефлексивное, симметричное, транзитивное, неполное.

Упражнения

5.25. По графу на рисунке 5.30 определите свойства соответствующего отношения.

5.26. По графу отношения R на множестве M (рис. 5.31) определите свойства R на множестве M.

5.27. Нарисуйте графы и определите свойства отношений:

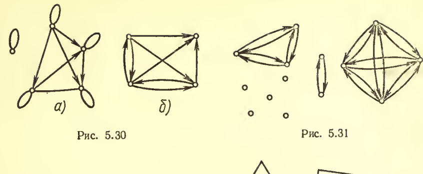


Рис. 5.30

Рис. 5.31

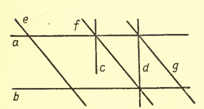
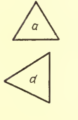


Рис. 5.32



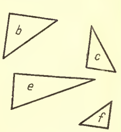


Рис. 5.33

а) R_1 — «быть параллельной» на множестве прямых M (рис. 5.32).
б) R_2 — «быть подобным» на множестве треугольников M (рис. 5.33).
в) R_3 — «быть неравным» на множестве чисел $M = \{1; 3; 4; 5\}$.
г) R_4 — «быть делителем» на множестве чисел $M = \{2; 6; 8; 12\}$.
д) R_5 — «быть перпендикулярной» на множестве прямых M (рис. 5.32).

5.28. M — некоторое множество людей. R — отношение «быть матерью» на M; R — «быть отцом» на M. На рисунке 5.34 сплошными стрелками обозначено отношение «быть матерью», штриховыми — «быть отцом». Проведите красные стрелки, которые бы соответствовали отношению «быть бабушкой», и синие стрелки, которые бы соответствовали отношению «быть дедушкой».

5.29. Дано некоторое множество M прямых на плоскости. $M = \{A; B; C; D; E\}$. Договариваемся, что отношение параллельности для любой пары прямых будем обозначать сплошными стрелками, а отношение перпендикулярности — штриховыми. В графе на рисунке 5.35 проведены не все стрелки, соответствующие этим отношениям. Проведите недостающие стрелки. Сколько на них штриховых и сколько сплошных?

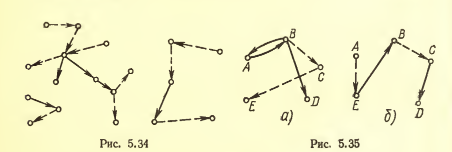


Рис. 5.34

Рис. 5.35

§ 3. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Часто некоторые элементы заданного множества по какому-то признаку объединяются в одно подмножество.

Примеры

1. Пусть M — «некоторое множество людей» (фамилии и года рождения приведены на рисунке 5.36). R_1 — отношение «иметь один и тот же год рождения» на M. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Соответствующий граф изображен на рисунке 5.37. Отношением R_1 множество M разбивается на три непересекающиеся подмножества: {Круглов}, {Иванов; Петров; Перов}, {Ионов; Смирнов}.

2. На этом же множестве людей M (см. таблицу на рисунке 5.36) рассмотрим отношение R_2 «иметь фамилии, начинающиеся с одной и той же буквы». R_2 тоже рефлексивно, симметрично и транзитивно; оно разбивает множество M на четыре непересекающиеся подмножества: {Иванов; Ионов}, {Круглов}, {Петров; Перов}, {Смирнов}. Соответствующий граф изображен на рисунке 5.38.

Фамилия	Год рождения
1. Иванов	1965
2. Ионов	1966
3. Круглов	1963
4. Перов	1965
5. Петров	1965
6. Смирнов	1966

Рис. 5.36

3. M — «некоторое множество людей», а R_3 — отношение «иметь одну и ту же группу крови» на M. R_3 рефлексивно, симметрично и транзитивно. Это отношение разбивает множество M на пересекающиеся подмножества людей с одинаковой группой крови.

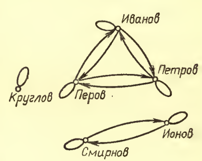


Рис. 5.37

4. Пусть теперь M — некоторое заданное множество слов русского языка; R_4 — отношение «начинаться с одной и той же буквы» на M. R_4 рефлексивно, симметрично и транзитивно. Этим отношением множество M разбивается на непересекающиеся подмножества слов, начинающихся на одну и ту же букву.

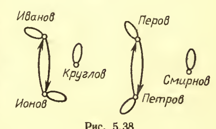


Рис. 5.38

Каждое отношение R во всех четырех рассмотренных примерах обладает одновременно тремя свойствами: рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью.

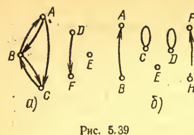


Рис. 5.39

Отношение R на множестве M, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется отношением эквивалентности.

Непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество M отношением эквивалентности, называются классами эквивалентности.

Граф, соответствующий отношению эквивалентности, может состоять из отдельных, не связанных друг с другом ориентированных графов, в каждой вершине которых есть петля, если есть ребро $<A;\ B>$, то есть и ребро $<B;\ A>$, и если есть одновременно ребра $<A;\ B>$ и $<B;\ C>$, то обязательно есть и ребро $<A;\ C>$.

Приведем еще примеры отношений эквивалентности:

1) «быть равным» на множестве чисел;
2) «быть конгруэнтной» на множестве геометрических фигур;
3) «быть подобной» на множестве геометрических фигур;
4) «учиться в одном классе» на множестве учащихся школы.

Упражнения

5.30. Почему граф на рисунке 5.39 не соответствует отношению эквивалентности?

5.31. Добавьте такие ребра к графу на рисунке 5.39, чтобы новый граф соответствовал отношению эквивалентности.

5.32. Нарисуйте граф с девятью вершинами, соответствующий отношению эквивалентности, чтобы при этом множество было разбито на три класса эквивалентности.

5.33. Нарисуйте граф отношения «иметь одно имя» на множестве учащихся вашего класса, сидящих на партах в ряду у окна. Является ли это отношение отношением эквивалентности?

5.34. Приведите пример отношения эквивалентности.

5.35. Приведите пример отношения, не являющегося отношением эквивалентности.

5.36. Пусть M — множество целых чисел, а отношение R на M таково, что ARB тогда и только тогда, когда число $(A - B)$ четное. Докажите, что R — отношение эквивалентности.

§ 4. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

Начнем с примеров установления различных порядков. Пусть M — множество учащихся VIII класса. Учитель физкультуры выстраивает ребят по росту. Используя отношение «быть выше ростом», он вводит определенный «порядок» на множестве M.

Если все учащиеся разного роста, то устанавливается так называемый «полный порядок»; место каждого определено однозначно.

Если хотя бы двое одного роста, то они могут меняться между собой местами. И в этом случае введен порядок, но его называют «неполным порядком».

На этом же множестве M классный руководитель при составлении списка для журнала вводит уже другой порядок. При этом используется отношение сравнения первых (если нужно вторых, третьих и т. д.) букв фамилий и имен с алфавитом.

На этом же множестве учащихся M можно ввести и другое отношение «быть старше», устанавливающее еще один порядок на M.

Пусть теперь M — конечное подмножество множества целых чисел. Числа множества M можно расположить в порядке возрастания, используя отношение «быть больше».

Итак, мы рассмотрели несколько практических примеров установления порядка.

Порядок — это особый вид отношения.

Отношение R называется отношением порядка на множестве M, если оно на этом множестве антисимметрично и транзитивно.

Множество M, для элементов которого задано отношение порядка R, называется упорядоченным этим отношением. Говорят также, что на M отношением R введен некоторый порядок.

Различают порядок полный и неполный в зависимости от того, все пары элементов множества связаны отношением R или не все.

Отношение R называется полным порядком на множестве M, если оно антисимметричное, транзитивное и полное. Говорят, что такое отношение R устанавливает полный порядок на множестве M.

Отношение R называется неполным порядком на множестве M, если оно антисимметричное, транзитивное и неполное.

Если R — отношение неполного порядка на M, то говорят, что R устанавливает в M неполный порядок.

Примеры

1. Рассмотрим множество M офицеров и отношение «быть старше по званию» на M. Пусть M = {полковник; майор; капитан; лейтенант}. Построим соответствующий граф (рис. 5.40).

Это отношение антисимметричное, транзитивное и полное, то есть отношение «быть старше по званию», на данном множестве устанавливает полный порядок. (Полковник старше по званию и майора, и капитана, и лейтенанта; майор старше по званию капитана и лейтенанта; капитан старше по званию лейтенанта.)

2. Если то же самое отношение «быть старше по званию» рассмотреть на множестве офицеров M_1, в котором двое имеют одно звание, где, например, M_1 = {полковник; майор; 1-й лейтенант; 2-й лейтенант}, то оно установит неполный порядок (рис. 5.41).

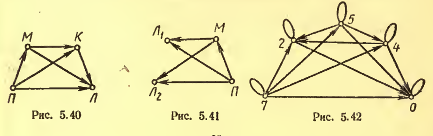


Рис. 5.40 Рис. 5.41 Рис. 5.42

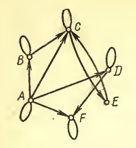


Рис. 5.43

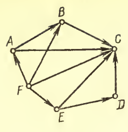


Рис. 5.44

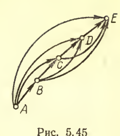


Рис. 5.45

3. Пусть M — множество проведенных в классе контрольных работ. После их проверки учитель обычно раскладывает работы в стопки по оценкам. В одну стопку — все работы с оценкой 5, в другую — с оценкой 4 и т. д. (Порядок работ в каждой отдельной стопке учителя обычно не интересует.) Затем учитель делает общую стопку: вниз кладет работы с двойками, на них — работы с тройками и т. д. На множестве работ рассматривается отношение «иметь оценку выше». Это отношение неполного порядка.

4. Отношение «$\geqslant$» на множестве чисел $M = \{7;\ 2;\ 5;\ 4;\ 0\}$ вводит полный порядок, располагает числа в порядке убывания: 7, 5, 4, 2, 0 (рис. 5.42).

Упражнения

5.37. Приведите пример множества M и отношения на M, которое бы обладало свойствами антисимметричности и транзитивности.

5.38. Какие особенности имеет граф отношения порядка?

5.39. Почему граф на рисунке 5.43 не соответствует отношению порядка?

5.40. Какие особенности имеет граф полного порядка?

5.41. Какая принципиальная разница между графами отношения полного порядка и графами отношения неполного порядка?

5.42. Почему граф на рисунке 5.44 не соответствует отношению полного порядка?

5.43. Соответствует ли граф на рисунке 5.45 отношению полного порядка?

5.44. Приведите примеры: а) отношения порядка; б) отношения полного порядка; в) отношения неполного порядка.

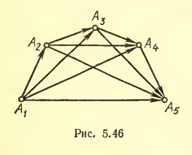


Рис. 5.46

При рассмотрении отношений порядка мы не обращали внимание на то, были они рефлексивны или антирефлексивны. Введем это различие вместе с понятием «строгого и нестрогого» порядка.

Отношение R называется отношением строгого порядка на множестве M, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно одновременно.

Порядки	Отношение					
	Антисимметричное	Транзитивное	Рефлексивное	Антирефлексивное	Полное	Неполное
Строгий	+	+		+		
Нестрогий	+	+	+			
Полный	+	+			+	
Неполный	+	+				+

Рис. 5.47

Граф, соответствующий отношению строгого порядка на множестве из пяти элементов, изображен на рисунке 5.46.

Отношение называется отношением нестрогого порядка на множестве M, если оно одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Графы отношения нестрогого порядка изображены, например, на рисунках 5.42 и 5.43.

Примерами отношений строгого порядка являются отношения «быть больше», «быть меньше» на множестве чисел, «быть старше», «быть моложе» на множестве людей.

К отношениям нестрогого порядка относятся отношения «быть не меньше», «быть не больше» на множестве чисел.

Определения разных видов порядка сведены в таблице на рисунке 5.47.

Конечно, отношение строгого порядка может быть как полным, так и неполным, и отношение нестрогого порядка тоже может быть как полным, так и неполным. Соответственно изменяются и графы этих отношений.

Упражнения

5.45. Используя введенные определения, поставьте знак «+» в таблице сочетаний свойств порядка (рис. 5.48).

5.46. Какими свойствами обладает отношение, граф которого изображен на рисунке 5.49? Как называется соответствующее отношение?

5.47. Нарисуйте граф с тремя вершинами:

а) полного строгого порядка; в) неполного строгого порядка;
б) полного нестрогого порядка; г) неполного нестрогого порядка.

5.48. Нарисуйте граф с пятью вершинами:

а) полного строгого порядка; б) неполного строгого порядка.

5.49. Приведите примеры:

а) отношения R_1 — полного строгого порядка;
б) отношения R_2 — полного нестрогого порядка;

Порядки	Отношение					
	Рефлексивное	Антирефлексивное	Симметричное	Антисимметричное	Полное	Неполное
Полный						
Неполный						
Строгий						
Нестрогий						
Полный строгий						
Полный нестрогий						
Неполный строгий						
Неполный нестрогий						

Рис. 5.48

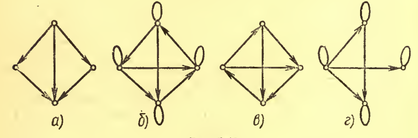


Рис. 5.49

в) отношения R_3 — неполного строгого порядка;
г) отношения R_4 — неполного нестрогого порядка.

5.50. Приведите примеры двух отношений R_1 и R_2, имеющих одинаковое название таких, чтобы отношение R_1 было строгим полным порядком, а R_2 — строгим неполным порядком.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА

При решении задач и доказательстве теорем в данном курсе использовались разные представления графов. На рисунках граф изображался с помощью точек (кружков, квадратиков) и отрезков, соединяющих пары точек. Отрезки в одних случаях были ориентированными, в других — неориентированными. В начале V главы граф был представлен специальной таблицей. Пользуются еще

матричным представлением графа. Выбирают то представление, которое удобнее и нагляднее при рассмотрении конкретного вопроса.

На протяжении первой части курса понятие о графе постепенно развивалось и обогащалось. Говоря о графе, мы явно или неявно пользовались понятием отношения, не уточняя его до V главы. В V главе за понятием отношения было закреплено вполне определенное содержание. Используя это понятие, дадим теперь определение графа.

Графом Г называется непустое множество М и множество отношений, заданных на М.

Если множество отношений на M обозначить через Q, то граф Γ можно обозначить так: $\Gamma = (M, Q)$, где M — непустое множество и Q — множество отношений, заданных на M.

Именно элементы первого множества M мы изображали точками (кружками, квадратиками) на плоскости и называли вершинами графа. Если элементы множества M не разбивались на непересекающиеся подмножества условием задачи или теоремы, то соответствующие вершины мы рисовали одинаковыми.

Элементы каждого из парных отношений на множестве элементов M мы изображали отрезками или стрелками и называли их ребрами. В зависимости от свойств отношения мы использовали на рисунках ориентированные ребра, неориентированные ребра, петли. Если множество Q было пустым, то на рисунке были только изолированные вершины (элементы множества M).

Если на множестве M выделялось какое-то одно отношение, то все соответствующие ему ребра на рисунке графа были одного вида (сплошные). Если на множестве M выделялось одновременно два отношения, то ребра на рисунках графа были двух видов (сплошные и штриховые), если на множестве M рассматривалось три отношения, то и ребра на рисунках графа были соответственно трех видов.

ГЛАВА VI

ДЕРЕВЬЯ В РАБОТЕ

С понятием «дерево» вы уже познакомились в первой главе. Дерево — одно из наиболее часто встречающихся в теории графов понятий, одновременно и простое и удобное в обращении. В этой главе о деревьях рассказывается подробнее, вводятся новые понятия, связанные с деревьями, рассматриваются новые особенности деревьев, а также возможности их использования при решении самых разнородных задач.

§ 1. ДЕРЕВЬЯ И ПОДСЧЕТ ЧИСЛА ИЗОМЕРОВ

Прежде чем говорить о применении деревьев для подсчета числа изомеров химического соединения, введем понятие корневой вершины. Вернемся для этого к рисункам 1.48 и 1.49. Ясно, что «особое место» в дереве занимают не только висячие вершины. Выделяются в этих деревьях и вершины, отмеченные двойным кружком. Такие вершины называют корневыми.

Корневую вершину нетрудно также выделить у деревьев на рисунках 6.1, 6.2 и 6.3.

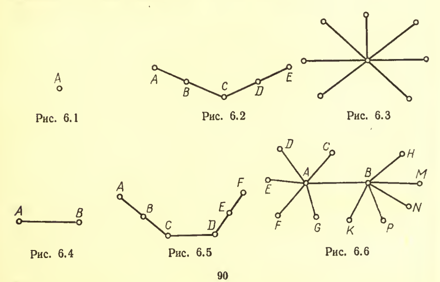


Рис. 6.1 Рис. 6.2 Рис. 6.3

Рис. 6.4 Рис. 6.5 Рис. 6.6

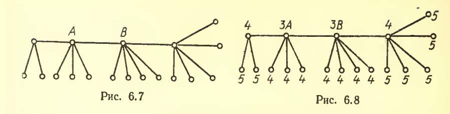


Рис. 6.7 Рис. 6.8

В первом случае корневой вершиной является единственная вершина графа A; во втором — вершина C; в третьем (такое дерево, все вершины которого, кроме одной, висячие, называют «звездой») — вершина A. Но какие вершины считать корневыми в графах, которые изображены на рисунках 6.4, 6.5 и 6.6?

Естественно считать, что все эти три дерева имеют по две корневые вершины. У дерева на рисунке 6.4 — это A и B, у дерева на рисунке 6.5 — это C и D; у дерева на рисунке 6.6 — это A и B.

Познакомимся еще с тремя понятиями: расстоянием между вершинами X и Y, радиусом и диаметром связного графа.

Расстоянием $d(X, Y)$ между вершинами X и Y графа Γ назовем длину кратчайшего пути, их соединяющего. Напомним, что если граф Γ — дерево, то путь, соединяющий вершины X и Y, единственный.

Подсчитаем для каждой вершины дерева, изображенного на рисунке 6.7, наибольшие из расстояний до всех остальных его вершин и запишем эти числа на рисунке возле вершин (рис. 6.8).

Наибольшее из таких чисел называют диаметром графа (в данном случае дерева), наименьшее — радиусом графа.

Вершины дерева, для которых максимальное из расстояний до других вершин равно радиусу, называются корневыми. Для дерева, изображенного на рисунке 6.7, диаметр равен 5, а радиус равен 3; корневые вершины — A и B.

Упражнения

6.1. Подсчитайте диаметр и радиус графа, изображенного на рисунке:
а) 6.3; б) 6.5; в) 6.6; г) 1.47.

6.2. Нарисуйте дерево:
а) с одной корневой вершиной и радиусом 3;
б) с одной корневой вершниой и радиусом 4;
в) с двумя корневымн вершинами и радиусом 4;
г) с двумя корневымн вершинами и раднусом 5.

6.3. Покажите, что дерево не может иметь три корневые вершины.

Теорема. *Любое дерево имеет либо одну, либо две корневые вершины. Корневые вершины — смежные.*

Доказательство. Действительно, это утверждение, как мы видели, справедливо для простейших деревьев, изображенных на рисунках 6.1 и 6.4.

Заметим теперь, что, как мы могли убедиться на опыте, 1) расстояние от данной вершины X дерева до любой другой его

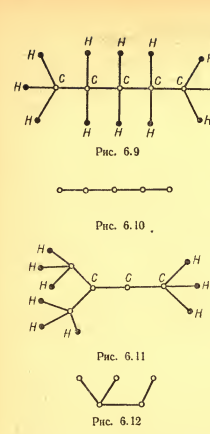


Рис. 6.9

Рис. 6.10

Рис. 6.11

Рис. 6.12

вершины Y может достигать наибольшего значения только тогда, когда Y — висячая вершина; 2) корневая вершина не может быть висячей.

Удалим теперь из дерева D, имеющего радиус r, все его висячие вершины и получим тогда дерево D_1, имеющее радиус длины $r-1$ и те же корневые вершины.

Ясно, что, продолжая этот процесс, придем в конце концов к дереву, изображенному на рисунке 6.1, или к дереву, изображенному на рисунке 6.4. Полученное в результате дерево имеет те же (ту же) корневые вершины (корневую вершину), что и дерево D.

Английский математик А. Кэли в 1875 году опубликовал первую работу по применению теории графов в органической химии. При этом он использовал понятие «висячая вершина» дерева для подсчета числа изомеров предельных (не имеющих циклов) углеводородов. К числу таких углеводородов относится, например, пентан C_5H_{12}. Его структурная формула изображена на рисунке 6.9. Этой формуле можно поставить во взаимно однозначное соответствие однокорневое дерево (рис. 6.10), показывающее взаимное расположение только атомов углерода в молекуле пентана. Но тем самым определяется однозначно и расположение атомов водорода в этой молекуле. На рисунке 6.11 представлена структурная формула молекулы одного из изопентанов, а на рисунке 6.12 соответствующее ей двукорневое дерево.

Упражнения

6.4. Существуют ли какие-нибудь еще двукорневые деревья, соответствующие молекулам какого-либо изопентана?

6.5. Существуют ли еще однокорневые деревья, соответствующие другому изопентану?

6.6. Постройте все однокорневые и двукорневые деревья, соответствующие гексану и изогексану. Сколько существует различных изомеров у изогексана?

А теперь перейдем к еще одной задаче о деревьях, также решенной А. Кэли.

§ 2. ЧИСЛО ДЕРЕВЬЕВ С ПРОНУМЕРОВАННЫМИ ВЕРШИНАМИ

Рассмотрим произвольное дерево с n заданными и пронумерованными в произвольном порядке вершинами. Пусть, например, $n = 11$ (рис. 6.13). Но ведь те же одиннадцать вершин можно соединить попарно десятью ребрами по-другому, чтобы получилось какое-то новое дерево, например, так, как показано на рисунке 6.14. У этого нового дерева совпадают с предыдущим только три ребра.

Спрашивается: сколько существует таких разных деревьев? Английскому математику А. Кэли опыт, приобретенный в процессе непосредственного подсчета числа деревьев, помог найти правильный ответ на этот вопрос. Деревьев с n пронумерованными вершинами ровно столько, сколько можно образовать последовательностей вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2})$ длины $n-2$, элементы которых выбираются из элементов множества $M = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$, то есть $\alpha_i \in M$. Один и тот же элемент в такой последовательности может встречаться по нескольку раз. Покажем, что таких последовательностей n^{n-2}.

Немецкий математик Пруфер указал алгоритм, следуя которому каждому дереву можно поставить во взаимно однозначное соответствие такую последовательность длины $n-2$, элементы которой черпаются из множества $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Вот этот алгоритм. Рассмотрим, например, дерево на рисунке 6.13. Выберем у него висячую вершину с наименьшим номером. Это вершина 2. Удалим ее вместе с принадлежащим ей ребром. Запишем (4,   (четыре — это номер вершины полученного дерева, ближайшей к удаленной). Переходим к следующему шагу алгоритма. Вновь выбираем висячую вершину с наименьшим номером. Это вершина 5. Удаляем ее вместе с ребром. Записываем (4,1,   (единица — это номер вершины, ближайшей к удаленной на втором шагу алгоритма). Второй шаг завершен.

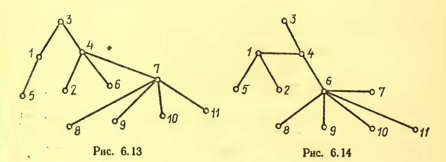


Рис. 6.13   Рис. 6.14

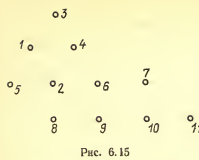


Рис. 6.15

Повторяя эту процедуру до тех пор, пока не останутся две висячие вершины, связанные между собой ребром, получаем для данного дерева определенную единственным образом последовательность (4, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7, 7) «длины» $n - 2$.

Обратно, пусть имеем, скажем, последовательность длины $n-2$, составленную из элементов множества M. Рассмотрим также вершины деревьев, пронумерованные, как на рисунке 6.15. Будем, следуя методу Пруфера, соединять соответствующие вершины ребрами и получать деревья. Вначале найдем наименьшее число натурального ряда, которое не встречается в последовательности (1, 4, 1, 4, 6, 6, 6, 6, 6). Это 2. Следовательно, вершину 2 нужно соединить ребром с вершиной 1, которая в последовательности записана первой. Следующее число натурального ряда, не входящее в оставшиеся элементы последовательности, 3. Поэтому вершину 3 соединяем ребром с вершиной 4 (следующее число в последовательности).

Таким образом в конце концов получаем единственно возможное дерево. Случайно оказалось, что оно в точности такое, как на рисунке 6.14.

Итак, мы убеждаемся, что деревьев с пронумерованными вершинами действительно столько же, сколько последовательностей рассматриваемого вида, то есть n^{n-2}.

Упражнения

6.7. Задайте 10 пронумерованных вершин и

а) изобразите какое-нибудь дерево с этими вершинами. Следуя описанному выше алгоритму, составьте для него последовательность вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$;

б) задайте другое дерево с этими же вершинами. Следуя описанному выше алгоритму, тоже составьте для него последовательность вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$;

в) восстановите два дерева, соответствующие последовательностям: (1, 3, 3, 4, 7, 7, 6, 5) и (1, 1, 3, 5, 5, 6, 8, 9).

6.8. Сколько существует различных деревьев с пятью пронумерованными вершинами? Изобразите три из них.

§ 3. ОТЫСКАНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

На рисунке 6.16 изображена схема местности. Передвигаться из пункта в пункт можно только в направлении стрелок. В каждом пункте можно бывать не более одного раза. Сколькими способами

можно попасть из пункта 1 в пункт 9? У какого из этих путей наименьшая длина? У какого наибольшая длина? Ответить на эти вопросы помогают деревья.

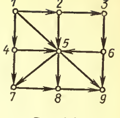


Рис. 6.16

Начиная с вершины 1, последовательно «расслаиваем» граф путей в дерево. При этом каждая вершина столько раз получает самостоятельное значение, сколько в нее в первоначальном графе входило путей (рис. 6.17). Наикратчайший путь заканчивается в меньшем «ярусе» висячей вершины дерева, самый длинный путь заканчивается в наибольшем «ярусе». (Ярусы отмечаем на рисунке штриховыми линиями.)

Число путей равно числу висячих вершин дерева, то есть 14. Длина кратчайшего пути (1, 5, 9) равна 2. Длина наиболее продолжительного пути равна 7. Длину пути помогает определить размещение каждой вершины дерева в соответствующем ярусе.

Этот пример, кстати, показывает, что понятие «длина пути» в теории графов не обязательно совпадает с понятием «длина пути» в геометрии (или географии).

Рисунок дерева полезен не только тем, что позволяет подсчитать число всех возможных путей, отыскать среди них кратчайший и наиболее протяженный. Он позволяет еще одновременно «увидеть» все пути и сравнить их.

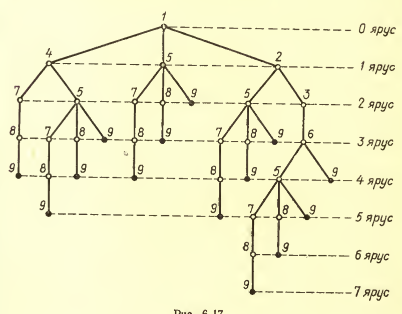


Рис. 6.17

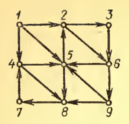


Рис. 6.18

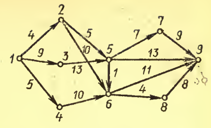


Рис. 6.19

Упражнение

6.9. Движение из пункта 1 в пункт 8 разрешается только в направлении стрелок, указанных на рисунке 6.18. В каждом пункте можно бывать не более одного раза. Сколькими способами можно попасть из пункта 1 в пункт 8? Какой из этих путей кратчайший, какой самый длинный?

Рассмотрим теперь похожую задачу, которая решается также с помощью специально выстраиваемого дерева. Только в этом случае план местности строится с учетом возможного различия в расстояниях между пунктами. Расстояния на рисунке 6.19 выписаны над ребрами.

Требуется определить число возможных путей из пункта 1 в пункт 9 и длину наикратчайшего из них.

Заметим, что в этом случае установления вершин по ярусам недостаточно для сравнения длин пути разнообразных маршрутов. Возле каждой вершины придется записывать длину пути, пройденного до того, как удалось попасть в соответствующий пункт на местности. Поскольку граф путей — дерево, эта длина определяется для каждой его вершины однозначно.

Упражнение

6.10. Решите сформулированную выше задачу.

§ 4. ДЕРЕВЬЯ В КОМБИНАТОРИКЕ

1. ДЕРЕВЬЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ ИЗ n ЭЛЕМЕНТОВ

С помощью леса можно представить перестановки из n элементов множества $M = \{a; b; c; d\}$ и подсчитать их число. Для $n = 4$ такой лес изображен на рисунке 6.20.

Всевозможные перестановки прочитываются по этой схеме от корневой до висячей вершины соответствующего дерева. Ярус показывает номер места, на котором расположен элемент. Число висячих вершин леса равно числу перестановок.

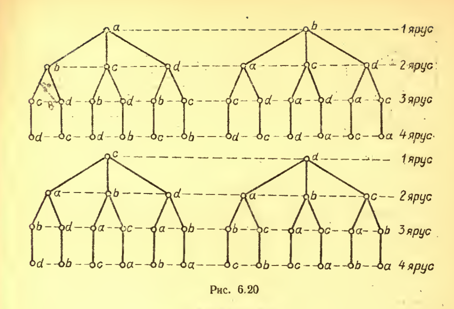


Рис. 6.20

Упражнение

6.11. Изобразите с помощью леса всевозможные размещения четырех элементов множества $\{a;\ b;\ c;\ d\}$ по трем ячейкам и подсчитайте их число.

2. МАРШРУТЫ ПО МЕСТНОСТИ И ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ C_n^m

Рассмотрим подмножества множества, состоящего из пяти элементов, и подсчитаем их число. При этом записывать подмножества будем не с помощью букв, как обычно, а в виде последовательностей длиной пять, составленных из нулей и единиц. Каждая из единиц показывает на наличие в подмножестве соответствующего элемента. Например, подмножества, содержащие один элемент, будут изображаться следующими последовательностями: 10000, 01000, 00100, 00010, 00001. Пустое подмножество $\varnothing$ будет соответствовать последовательности 00000. Подмножества, содержащие по два элемента из пяти, запишутся с помощью следующих последовательностей: 11000, 10100, 10010, 10001, 01100, 01010, 01001, 00110, 00101, 00011. Всего их $C_5^2 = 10$.

Вообще, число сочетаний из n элементов по m равно числу всевозможных последовательностей из m единиц и $n - m$ нулей.

После этого небольшого предисловия перейдем к подсчету числа возможных путей на рисунке 6.21 из пункта A к пунктам B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7. Направления следования по этим путям указаны на рисунке стрелками. Один из возможных путей выделен для наглядности жирной линией. Замечаем, что все пути от A до B_i($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) имеют одинаковую длину. Она равна наибольшему номеру яруса.

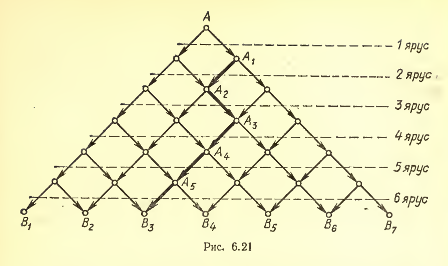


Рис. 6.21

Каждому из путей поставим в однозначное соответствие «свою» последовательность из нулей и единиц. Для этого каждый поворот направо при следовании по маршруту от A до B_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) будем обозначать единицей, каждый поворот налево — нулем. Тогда, например, пути, выделенному жирной линией на рисунке 6.21, будет поставлена в соответствие последовательность «длины» шесть: 101000. Ясно, что разным путям будут соответствовать разные последовательности указанного вида. Нетрудно убедиться и в том, что рассматриваемсе отображение не только однозначно, оно и взаимно однозначно. Действительно, любая последовательность рассматриваемого вида определяет единственный путь от A до некоторого B_i, при этом разные последовательности определяют разные пути.

Попасть, например, из A в B_3 можно разными путями, но во всех случаях придется повернуть два раза вправо и два раза влево. Поэтому число путей, ведущих из A в B_3, равно C_6^2. Аналогично, число различных путей, ведущих из A в B_4, равно C_6^3, из A в B_5 равно C_6^4 и т. д.

Число путей из A во все B_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) равно

$$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7.$$

3. РАЗБИЕНИЯ И КОМПОЗИЦИИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Задачи на разбиение натуральных чисел впервые решались еще в XVII веке Г. В. Лейбницем. Родственные им задачи и сейчас занимают важное место в современной комбинаторике.

Разбиение натурального числа — это его представление в виде суммы натуральных слагаемых. Приведем всевозможные разбие-

ния чисел 3 и 4: $3 = 3$, $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$; $4 = 4$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 2$, $4 = 2 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Что же такое композиция натурального числа? Это его «разбиение» с учетом порядка расстановки слагаемых. Например, число 5 может быть представлено в виде суммы $2 + 3$ или $3 + 2$. Обе эти записи обозначают одно и то же разбиение, но две разные композиции. Ясно, что число композиций для данного натурального числа, вообще говоря, больше числа его разбиений. Приведем всевозможные композиции чисел 3 и 4: $3 = 3$, $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 2$, $3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 4$, $4 = 3 + 1$, $4 = 1 + 3$, $4 = 2 + 2$, $4 = 2 + 1 + 1$, $4 = 1 + 2 + 1$, $4 = 1 + 1 + 2$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Две композиции считаются равными только в том случае, если они состоят из одинакового числа соответственно равных слагаемых, расположенных в одинаковом порядке.

Всевозможные композиции любого натурального числа n можно представить с помощью дерева, способ построения которого

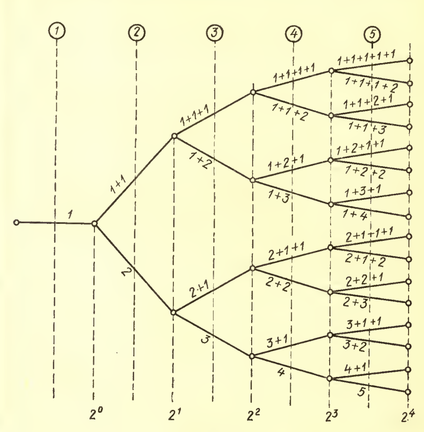


Рис. 6.22

должен быть ясен из рассмотрения рисунка 6.22, где изображено такое дерево для случая $n = 5$.

Число, которое представляется набором композиций для каждого соответствующего яруса дерева, на рисунке 6.22 выделяется с помощью кружочка. Например, в ярусе 3 находим, следуя по вертикали сверху вниз, всевозможные композиции числа 3 в определенной очередности: $1 + 1 + 1$, $1 + 2$ и т. д. Число композиций при переходе от яруса k к ярусу $k + 1$, как это видно, например, из рисунка 6.22, удваивается (в каждую вершину входит одно ребро, а выходят в следующий ярус два), а при $k = 1$ оно равно единице. Поэтому число композиций для произвольного яруса k равно 2^{k-1}.

Вернемся теперь к графам того «типа», пример которого был изображен на рисунке 6.21. Подвергнем такой граф «операции расслоения». Станем «раздваивать» вершины, в которые входят по два ребра (рис. 6.22).

Нетрудно заметить, что «расслоенный» граф представляет собой дерево, «устроенное» в точности так, как дерево, изображенное на рисунке 6.22 (если не принимать во внимание крайней слева вершины и ребра, которому она принадлежит). В каждую вершину графа (кроме корневой) на рисунке 6.23(б) входит одно ребро, из каждой (кроме висячих) выходят по два ребра.

Спрашивается, как осуществить над деревом, изображенным на рисунке 6.23(б), операцию, обратную операции расслоения, чтобы при этом вновь получился граф, изображенный на рисунке 6.23(а).

Для этого нужно слить между собой те вершины дерева, изображенного на рисунке 6.23(б), для попадания в которые при следовании из корневой его вершины в висячие приходится сделать одинаковое число правых поворотов.

Поставим теперь следующий вопрос. Сколько композиций, насчитывающих m ($m \leqslant n$) слагаемых, может содержать данное натуральное число n? Имеем в виду, что композиции данного натурального числа могут отличаться количеством

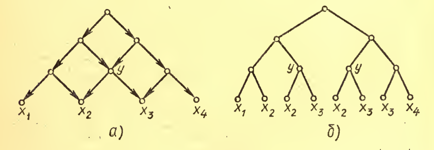


Рис. 6.23

слагаемых. Чтобы ответить на этот вопрос, можно осуществить для дерева, представленного на рисунке 6.22, операцию, обратную операции расслоения (она не имеет смысла только для крайней слева вершины и ребра, которому она принадлежит). Это же дерево с более удобными для описания такой операции обозначениями изображено на рисунке 6.24. При этом, очевидно, сольются вершины G, K, N и S. Путь в каждую из них из вершины B содержит в точности один правый поворот. Число таких путей мы уже умеем находить (см. п. 2, § 4 этой главы). Оно равно C_4^{1-1}. Вообще, искомое число композиций равно C_{n-1}^{m-1}.

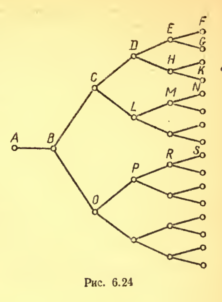


Рис. 6.24

§ 5. ДЕРЕВЬЯ, ВЕРОЯТНОСТЬ, ГЕНЕТИКА

Деревья полезно использовать для наглядного описания вероятностей[1] независимых и равновозможных событий, составляющих полную группу. Дерево можно, например, построить для иллюстрации всех исходов при двукратном бросании игральной кости (рис. 6.25). В этом случае события «Выпало одно очко», «выпало два очка», «выпало три очка», «выпало четыре очка», «выпало пять очков» и «выпало шесть очков» равновозможные, несовместные и составляют полную группу. На рисунке 6.22 ярус дерева показывает номер соответствующего события: 1-й ярус — не бросалась ни одна кость, 2-й ярус — бросалась одна кость, 3-й ярус — две и т. д. Сами события характеризуются ребрами, входящими в интересующий нас ярус.

Эти ребра при бросании двух костей показывают, например, все 36 равновозможных исходов. При этом ясно, что сумма вероятностей событий в каждом ярусе равна 1, а именно: $P(1)+P(2)+ + P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$; $P^2(1)+P(1)\cdot P(2)+P(1)\times \times P(3)+P(1)\cdot P(4)+P(1)\cdot P(5)+P(1)\cdot P(6)+P(2)\cdot P(1)+ + \ldots + P^2(6)=1$.

[1] См.: Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9-го класса средней школы /Под ред. А. Н. Колмогорова. М., «Просвещение», 1977.

Рис. 6.25

Рис. 6.26

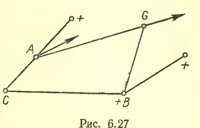


Рис. 6.27

Упражнение

6.12. Изобразите дерево возможных исходов при троекратном бросании монеты.

Приведем примеры использования деревьев в генетике. С помощью дерева можно наглядно представить наследование пары генов G и g, передаваемых потомку родителями. Потомок получает эти гены в одной из комбинаций: GG, gg или Gg. Генетически комбинация Gg не отличается от комбинации gG.

В генетике допускается, что наследование данного гена происходит случайно, независимо и с равными вероятностями для всех потомков (у растений, например, их может быть очень много). Пусть ген G наследуется (и от отца и от матери) с вероятностью p, ген g — с вероятностью q. В этом случае отца в смысле унаследования гена можно уподобить, например, одной бросаемой монете, мать — второй (рис. 6.26); тогда $p+q=1$.

Далее будем полагать, что $p = q = \frac{1}{2}$. Замечаем, кстати,

что у таких «генеалогических» деревьев вершины, если они не висячие и не корневые, имеют степень 3.

Теперь от родителей перейдем к «дедушкам» и «бабушкам» и продлим дерево еще на один ярус.

Когда сочетаются браком двоюродные брат и сестра, они могут передать своему ребенку копии пар генов, которыми обладали их общие дедушка и бабушка (возможными мутациями этих генов пренебрегаем).

Считая, что в общем случае неизвестно численное значение вероятности p_0 того, что потомок наследует от своих родителей пару одинаковых генов GG или gg[1], определим в зависимости от p_0 вероятность унаследования общей пары генов от общего дедушки.

Граф, описывающий ситуацию, которая нас интересует, в случаях так называемого кровного родства деревом не является — две его висячие вершины «слипаются» (рис. 6.27).

Введем «коэффициент кровного родства» по формуле $k = p_0 + (1 - p_D)p_0$, где p_D — вероятность того, что оба гена C являются копиями генов G. Оказывается при этом, что вероятность p_D нетрудно подсчитать.

Рассмотрим один из генов, который C унаследовал от своего отца A. Вероятность того, что A унаследовал этот ген от своего деда D, равна $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что дедушка передал копию того же гена B, также равна $\frac{1}{2}$, и вероятность того, что B передал копию этого гена C, равна $\frac{1}{2}$. Все эти события независимые, и, следовательно, $p_D = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

$$k = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}p_0.$$

Рассмотренный пример дает некоторое представление о расчетах, связанных с проблемами сохранения в потомстве желательных признаков прародителей: вывода сортов пшеницы, пород собак, голубей, домашних животных, искусственного восстановления вымирающих пород животных... Все это проблемы разные по их роли и значимости, но они имеют общую математическую суть.

§ 6. КРЕСТИКИ И НОЛИКИ

Вы, конечно, умеете играть в крестики и нолики на «игровом поле» 3×3? Наверное, нет смысла напоминать условия этой игры. Однако для дальнейшего важно ввести свое обозначение для каждой из этих девяти клеток (рис. 6.28). Теперь очередной ход игры

---

[1] Для каждого конкретного вида живых существ значение p_0 может быть оценено из биологического эксперимента.

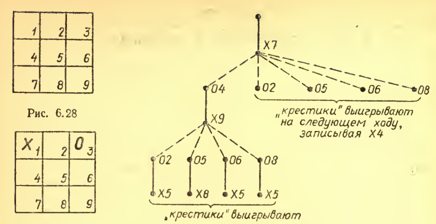


Рис. 6.28

Рис. 6.29

Рис. 6.30

удобно описывать, используя специальные слова и обозначения, например «крестик поставлен в клетку 1» (кратко «X1»), «нолик поставлен в клетку 3» (кратко «03») (рис. 6.29). Для того чтобы представить позицию в игре, удобно рассмотреть «игровое поле» со сделанными ходами, то есть с нанесенными на него крестиками и ноликами.

Однако эти обозначения и описания, которые хорошо представляют отдельные ситуации, отдельные позиции в игре, недостаточно эффективны, когда надо представить ход игры в целом. «Крестики и нолики» относятся к числу простейших детерминированных игр (то есть таких игр, исход в которых определяется в пользу начинающего, если он действует «правильно», в соответствии с точно определенным алгоритмом). Алгоритм этот представляет собой инструкцию как нужно отвечать на ту или иную инициативу соперника. В игре «Крестики и нолики» такой алгоритм описывается деревом.

Если игра начата ходами (X1) и (03), то дерево, описывающее дальнейшую разумную игру крестиками, приводится на рисунке 6.30. Здесь вершины соответствуют очередным позициям игры, «сплошные» ребра соответствуют ходам крестиками, а «штриховые» — ноликами.

Упражнения

6.13. Постройте дерево игры, показывающее ходы партнеров, приводящие к победе «крестиков», если игра начата ходами: а) (X1) и (02); б) (X1) и (09); в) (X5) и (08).

6.14. Докажите, что если игра начата ходами (X1) и (06), то «крестики» могут добиться победы независимо от игры «ноликов».

6.15. Покажите, что «нолики» добьются ничьей независимо от игры «крестиков», если игра начата ходами: а) (X2) и (05); б) (X5) и (03).

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Предположим, что строится и оборудуется современная школа. При этом выполняется сложный комплекс работ. Разные участки работ этого комплекса поручаются отдельным специалистам, группам специалистов, организациям, бригадам, цехам, мастерским и т. д. А если строится завод-гигант или электростанция, то число организаций и людей, причастных к строительству, значительно возрастает. Возникает много проблем. Как наилучшим образом организовать отдельные работы, чтобы строительство закончить в наиболее короткий срок? Как распределить рабочую силу, материалы, финансы, оборудование, чтобы вся работа обошлась максимально дешево? Как поступить, если в процессе выполнения работ окажется, что какие-то исполнители не укладываются в срок? Как быстрее узнать, где в данный момент самый ответственный участок? С какого участка в данный момент можно взять людей, не срывая сроков выполнения всей работы? При планировании такого комплекса работ и руководстве им одной интуиции руководителя недостаточно.

В этой главе будет показано, как построить сеть сложного комплекса работ, как определить по сети самые ответственные работы, как вычислить время завершения всего комплекса, как найти резервы времени для отдельных событий и работ.

§ 1. СЕТЕВОЙ ГРАФИК

Всякий намеченный комплекс работ, необходимых для достижения некоторой цели, называют *проектом*. Так, говорят о проекте строительства школы, завода, жилого дома, гидроэлектростанции, города. Проведение школьного вечера, туристского слета, постановка пьесы в школьном театре, план работы над сочинением, контрольной работой, сдача экзамена, проведение семейного праздника, лечение больного требуют выполнения некоторых комплексов работ. Можно говорить о комплексе работ (или дел), запланированных на день, на неделю, на каникулы. Можно говорить о комплексах работ, выполняемых в течение недели (года) комсомольским активом класса.

Проект (или комплекс работ) расчленяется на отдельные работы.

Назовем хотя бы некоторые из работ, которые входят в комплекс работ по строительству школы. Они перечисляются здесь не в той последовательности, в которой должны выполняться.

1. Подвоз материалов, необходимых для строительства (песка, бетона, кирпичей и т. п.).
2. Геодезическая съемка местности.
3. Расчистка площадки для строительства.
4. Разработка проекта здания школы.
5. Монтаж фундамента.
6. Рытье котлована для фундамента.
7. Кладка стен.
8. Внутренняя электропроводка.
9. Доставка на стройплощадку блоков подъемного крана.
10. Принятие решения о строительстве школы.
11. Штукатурка стен.
12. Подвоз земли для пришкольного участка.
13. Окончательная уборка строительной площадки.
14. Подвоз школьной мебели.
15. Установка школьной мебели.
16. Окончательная уборка помещения.
17. Окраска стен.
18. Побелка потолков.
19. Прием школы комиссией.
20. Монтирование подъемного крана.
21. Монтаж каркаса здания.

Еще один пример. Допустим, что школьный театр готовит новую пьесу. Это тоже требует последовательного выполнения отдельных работ. Перечислим некоторые из них (порядок следования их друг за другом здесь тоже не соблюден).

1. Проведение первой репетиции.
2. Создание декораций.
3. Распределение ролей.
4. Подготовка костюмов.
5. Проба на роли.
6. Проведение первого спектакля.
7. Проведение генеральной репетиции.
8. Выбор пьесы.
9. Работа над ролями.

Каждая отдельная работа, входящая в комплекс (проект), требует затраты определенного времени. Некоторые работы могут выполняться только в определенном порядке. Нельзя, например, укладывать фундамент, если еще не вырыт котлован для него; нельзя начинать монтаж каркаса здания, если еще не смонтирован подъемный кран; нельзя проводить пробу на роли, если еще не выбрана пьеса. Существуют работы, входящие в комплекс, которые могут выполняться независимо друг от друга, одновременно. Например, одновременно может вестись работа по созданию декораций

и работа над ролями. При строительстве здания одновременно могут укладывать фундамент, завозить металлоконструкции для каркаса здания, монтировать подъемный кран.

При выполнении комплекса работ всегда можно выделить ряд событий, то есть итогов какой-то деятельности, позволяющих приступить к выполнению следующих работ. Назовем несколько событий: проект утвержден; площадка для строительства расчищена; котлован вырыт; фундамент установлен; роли распределены; генеральная репетиция проведена; декорации подготовлены.

Если каждому событию поставить в соответствие вершину графа, а каждой работе — ориентированное ребро, то получится некоторый граф. Он будет отражать последовательность выполнения отдельных работ и наступлений событий в едином комплексе. На рисунке 7.1 изображены части таких графов. Если над ребрами проставить время, необходимое для завершения соответствующей работы, то получится так называемая *сеть*. Изображение такой сети будем называть *сетевым графиком*.

Еще один фрагмент сетевого графика изображен на рисунке 7.2. Некоторые работы здесь выполняются в определенной последовательности, другие — параллельно.

Все события на рисунке 7.2 обозначены разными числами. Расшифровать их можно так:

0 — исходное событие, начало строительства;

1 — котлован подготовлен;

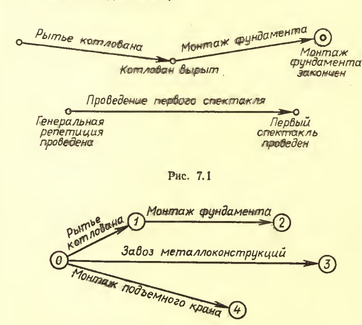


Рис. 7.1

Рис. 7.2

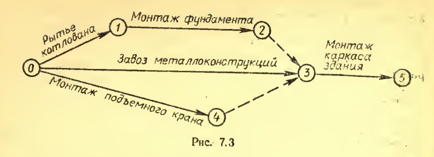


Рис. 7.3

2 — монтаж фундамента закончен;
3 — металлоконструкции завезены;
4 — подъемный кран смонтирован.

Иногда для начала какой-то работы требуется завершение нескольких работ. Например, для начала монтажа требуется, чтобы был заложен фундамент, завезены металлоконструкции для каркаса здания и смонтирован подъемный кран. Эти работы выполняют разные люди, и завершиться они могут в разное время. Для отражения на сетевом графике очередности выполнения работ дополнительно используются штриховые стрелки (рис. 7.3). Штриховые стрелки отражают условную зависимость между событиями.

Сетевой график является графической моделью всего комплекса работ или производственного процесса. Он отражает взаимосвязь всех работ, событий, технологического процесса, обеспечение комплекса материальными и техническими ресурсами.

В основе построения сетевого графика лежат 3 основных понятия: работа, событие и путь. С понятием «путь» мы уже знакомы.

Термин «работа» в сетевом планировании используется в широком смысле. Под работой здесь понимается:

1. *Действительная работа* — любой трудовой процесс, требующий затрат труда, времени и материальных ресурсов. (Примеры: проектирование двигателя, испытание его, монтаж фундамента, побелка потолков, проведение репетиции.)

2. *Ожидание* — пассивный процесс, не требующий затрат труда и материальных ресурсов, но требующий затрат времени. (Примеры: твердение бетона, сушка штукатурки.)

3. *Фиктивная работа* — чисто условная зависимость между событиями, которая вводится только для удобства изображения сети. Фиктивная работа не связана с затратой труда, времени и ресурсов.

Как уже говорилось, на сетевом графике действительная работа и ожидание изображаются сплошными стрелками, а фиктивная работа — штриховыми стрелками.

Под «событием» в сетевом планировании понимают:

1. *Исходное событие* — начало выполнения проекта. Исходное событие не имеет предшествующих работ.

2. *Завершающее событие* — достижение конечной цели проекта (или одной из конечных целей). Завершающее событие не имеет следующих за ним работ.

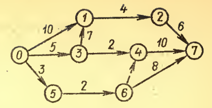


Рис. 7.4

3. *Промежуточное событие* (итог какой-то деятельности) — результат выполнения одной или нескольких работ, позволяющий приступить к выполнению последующих работ. (Например, роли распределены, это позволяет приступить к работе над ролями.)

Событие не является процессом, оно не сопровождается затратами рабочей силы, времени и средств. Событие не может наступить, пока не закончатся все предшествующие ему работы. На сетевом графике событие изображается кружком, в котором проставляется число — шифр данного события.

Любая стрелка на сетевом графике соединяет только две вершины и отражает процесс перехода от одного события к другому. Поэтому любая работа может быть зашифрована парой чисел, соответствующих предшествующему и последующему событиям. Например, на рисунке 7.3 работу «Монтаж подъемного крана» можно зашифровать упорядоченной парой чисел: $<0; 4>$.

Время, необходимое для выполнения работы $<i; j>$, называют продолжительностью работы и обозначают $t<i; j>$. Обозначение проставляют над соответствующей стрелкой.

На рисунке 7.4 приведен сетевой график некоторого комплекса работ. Над стрелками проставлено время выполнения каждой из работ. Здесь $t<0; 1> = 10$; $t<3; 1> = 7$; $t<4; 7> = 10$.

Упражнения

7.1. Какие из работ, входящих в проект при строительстве школы и перечисленных на странице 106, могут предшествовать началу:

а) кладки стен;

б) окраски стен;

в) побелки потолков?

7.2. Какие работы из перечисленных на странице 106 предшествуют при подготовке новой пьесы:

а) созданию декораций;

б) проведению генеральной репетиции?

7.3. Какие из перечисленных ниже утверждений относятся к событиям, какие — к работам?

1. Сочинение написано.
2. Чтение литературы по теме сочинения.
3. Литература по теме прочитана.
4. Выбор темы сочинения.
5. Вступление написано.
6. Написание заключения.
7. Сочинение сдано учителю.
8. Гости приглашены.
9. Сервировка стола.

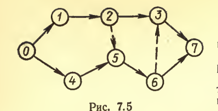


Рис. 7.5

10. Приготовление салата.

11. Гусь зажарен.

7.4. В школе готовится новогодний вечер.

а) Назовите отдельные работы, которые должны быть при этом выполнены.

б) Назовите несколько событий, которые должны быть включены в соответствующий сетевой график.

7.5. В классе готовится и проводится комсомольское собрание.

в) Назовите отдельные работы, которые должны быть при этом выполнены.

б) Назовите несколько событий, которые должны быть включены в соответствующий сетевой график.

7.6. Приведите пример процесса, который можно отнести к «ожиданию».

7.7. На рисунке 7.5 сетевой график некоторого проекта. Перечислите работы, которые должны быть выполнены до наступления события под номером: а) 5; б) 6; в) 3.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Прежде чем непосредственно приступать к построению сетевого графика, составляют список всех работ, необходимых для выполнения заданного комплекса работ. Далее выясняют технологическую последовательность их выполнения; строят отдельные фрагменты сетевого графика; по возможности их упрощают. После этого из отдельных фрагментов строят общий сетевой график. В таких случаях принято говорить о «сшивании сетевого графика»[1].

Познакомимся с основными правилами построения сетевых графиков.

1. Каждую стрелку в сетевом графике по возможности рисуют так, чтобы ее конец находился правее начала, по возможности горизонтально.

2. Для удобства сетевой график строят без лишних пересечений стрелок. (Вместе с тем при составлении чернового варианта не следует увлекаться внешним видом сети.)

3. Следят за тем, чтобы во все вершины, кроме той, которая соответствует исходному событию, входила по меньшей мере одна стрелка, так как все события, кроме исходного, имеют предшествующую работу.

4. Следят за тем, чтобы из всех вершин сети, кроме той, которая соответствует завершающему событию, выходили стрелки, так как все события, кроме завершающего, имеют последующую работу.

5. Следят за тем, чтобы в сетевом графике не образовывалось циклов.

---

[1] Сетевой график сложного проекта обычно составляют несколько групп специалистов, каждая из которых делает сетевой график своего участка. Процесс объединения нескольких сетевых графиков в один общий носит название «сшивание сетевого графика». В последнее время все чаще «сшивание сети» выполняют на ЭВМ по специально разработанным программам.

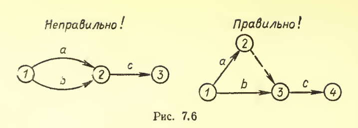


Рис. 7.6

Неправильно!

Правильно!

Рис. 7.7

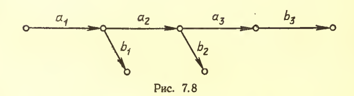


Рис. 7.8

6. Если одно событие служит началом для двух или более работ, после завершения которых начинается выполнение следующей работы, то вводится штриховая стрелка (условная зависимость) и дополнительное событие со своим номером.

На рисунке 7.6 приведены неправильное и правильное изображения двух работ a и b, начинающихся после события 1; после завершения a и b начинается работа c.

На рисунке 7.7 приведены неправильное и правильное изображения трех работ a, b, c, начинающихся после события 1; после их завершения начинается работа d.

Правило 6 важно для расчетов сетевых графиков на ЭВМ, так как работы кодируются начальными и конечными событиями. При нарушении этого правила в памяти машины окажутся две или более одинаково закодированных работ.

7. Если какие-то работы могут начаться до полного завершения предыдущей работы, то ее следует разбить на части и считать каждую из них самостоятельной.

На рисунке 7.8 изображена часть сетевого графика. Здесь работа a разбита на 3 части a_1, a_2 и a_3, причем после выполнения a_1 начинается работа b_1, после a_2 — b_2, после a_3 — b_3.

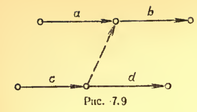


Рис. 7.9

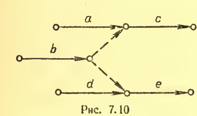


Рис. 7.10

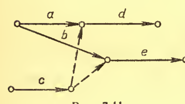


Рис. 7.11

Такая ситуация может возникнуть, например, при проведении труб (водопроводных или газовых). Укладку труб можно производить по частям, не дожидаясь, когда будет готова траншея на всем участке.

8. На сетевом графике следует четко отражать последовательность выполнения отдельных работ и их взаимосвязи. В помощь вводятся штриховые стрелки (условные зависимости) и дополнительные вершины (события).

Рассмотрим примеры построения отдельных фрагментов сетевых графиков.

1) Четыре работы (a, b, c, d) связаны между собой следующей зависимостью: b начинается после завершения работ a и c; d — после завершения работы c (рис. 7.9).

2) Пять работ (a, b, c, d, e) связаны между собой следующей зависимостью: c начинается после завершения a и b; e — после окончания b и d (рис. 7.10).

3) Пять работ (a, b, c, d, e) связаны между собой так: работы a и b начинаются после завершения каких-то одних и тех же работ; работу d можно начинать по окончании работ a и c; работу e — после завершения работ b и c (рис. 7.11).

4) Пусть три работы a, b и c связаны технологической последовательностью: b начинается после завершения a; c — после завершения b. Это могут быть: a — рытье котлована; b — монтаж фундамента; c — кладка стен. Если можно монтаж фундамента начинать при подготовке части котлована, то выделяют два участка (или более), на которых рабочие определенных профессий последовательно выполнят соответствующие работы. Сетевой график показан на рисунке 7.12.

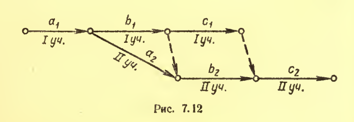


Рис. 7.12

Упражнения

7.8. Перечислите работы, которые может выполнить вожатый в подшефном пионерском отряде в течение, например, первого полугодия. Ведь комплекс его работ тоже можно представить сетевым графиком: какие-то работы могут выполняться только после окончания других, некоторые работы ведутся параллельно.

7.9. Перечислите работы, которые обычно выполняет комсорг в классе в течение, например, первого полугодия.

7.10. Перечислите отдельные работы, которые выполняются при ведении домашнего хозяйства.

7.11. Приведите примеры комплексов работ, которые можно было бы представить сетевым графиком.

7.12. Составьте список отдельных работ, которые необходимо выполнить при подготовке и проведении:

а) школьного КВН;

б) шахматного турнира на первенство школы среди старшеклассников.

7.13. По сетевому графику (рис. 7.13) определите, после завершения каких работ можно начать работу:

а) обозначенную буквой *e*;

б) обозначенную буквой *c*.

7.14. Определите, какой из фрагментов сетевых графиков на рисунке 7.14 правильный, если известно, что начало работы *c* зависит только от завершения работы *b*, а работа *d* зависит от завершения работ *a* и *b*.

7.15. Определите, какой из фрагментов сетевых графиков на рисунке 7.15 правильный, если известно, что начало работы *c* зависит только от работы *a*; начало работы *e* зависит только от завершения работы *b*; начало работы *d* зависит от завершения работ *a* и *b*.

7.16. Определите, какой из фрагментов сетевых графиков на рисунке 7.16 правильный, если известно, что работу *e* можно начинать после завершения работ *a* и *b*, а начало работы *d* зависит только от окончания работ *b* и *c*.

7.17. Назовите ошибки, допущенные при построении сетевого графика на рисунке 7.17.

7.18. Постройте фрагмент сетевого графика, если:

1) Начало работы *e* зависит только от окончания работ *a*, *b* и *c*; начало работы *d* — только от окончания работ *c* и *b*.

2) Начало работы *e* зависит только

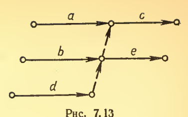
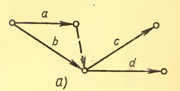


Рис. 7.13



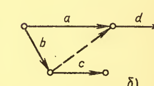
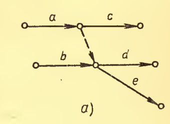


Рис. 7.14



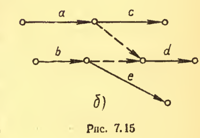
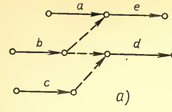
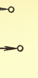


Рис. 7.15





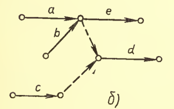


Рис. 7.16

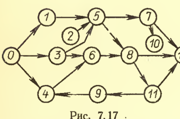


Рис. 7.17

от окончания работ *a* и *c*; начало работы *d* — только от окончания работ *b* и *c*.

3) Работы *b* и *c* имеют иачалом одно и то же событие; начало работы *e* зависит только от окончания работ *a*, *b* и *c*; начало работы *d* — только от окончания работы *b*.

7.19. Постройте фрагмент сетевого графика, если:

1) Начало работы *e* зависит от окончаиия работы *c*; начало работы *d* — только от окончания работ *a* и *c*; начало работы *h* — от окончания работ *b* и *e*.

2) Начало работы *e* зависит только от окончаиия работ *a* и *c*; начало работы *d* — только от окончания работы *c*; начало работы *h* — только от окончания работ *b* и *c*.

3) Начало работы *e* зависит от окончаиия работы *b*; начало работы *d*—от окончания работ *a*, *c* и *e*; начало работы *h* — от окончания работ *a* и *c*.

7.20. Постройте фрагменты сетевых графиков, если:

1) Работу *e* можно начать после окоичания работ *a* и *c*; работу *h* — после окончания работ *b* и *c*.

2) Работы *a* и *c* имеют иачалом одно и то же событие; работа *e* может иачаться после окончания работ *a* и *c*; работа *d* — после окончания работ *b* и *c*; работа *h* — после окончаиия работы *b*.

7.21. Ниже перечислены отдельные работы, которые выполняются при подготовке к туристскому походу.

a) Разработка маршрута похода.
b) Получение снаряжения.
c) Заготовка продуктов.
d) Формирование группы.
e) Утверждеиие руководителя группы и маршрута в совете по туризму.
f) Выбор руководителя группы и его помощииков.
h) Получение разрешения на выход.
q) Сбор денег и получение дотации.
l) Проверка пригодности снаряжения и ремонт его.
m) Выход на маршрут.

Составьте сетевой график подготовки туристского похода. Используйте буквы, которыми обозначены отдельные работы в списке.

7.22. Ниже перечислены отдельные работы, которые выполняют при ремонте квартиры.

a) Шпаклевка потолков и стен.
b) Побелка потолков.
c) Замена виешней электропроводки на внутреннюю.
d) Принятие решения о ремонте квартиры.
e) Договор с малярами.
f) Покупка материалов, иеобходимых для малярных работ.
h) Договор с электромонтерами.
q) Оклеивание стен обоями.
l) Окраска дверей и оконных рам.
m) Покрытие полов лаком.

п) Уборка после завершения малярных работ.

о) Шпаклевка дверей и оконных рам.

Составьте сетевой график ремонта квартиры. При составлении сетевого графика используйте буквы, которыми обозначены отдельные работы в приведенном списке.

7.23. Перечислите отдельные работы, которые вы выполняете обычно в течение рабочего дня, учитывая и работу по дому.

Составьте соответствующий сетевой график.

7.24. Перечислите основные дела (работы), которые вы планируете на отпускное время. Составьте соответствующий сетевой график.

7.25. Составьте сетевой график комплекса работ семьи в один из рабочих дней, учитывая работу взрослых на службе, учебу детей, домашние дела.

§ 3. КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ

Пусть сетевой график некоторого проекта (комплекса работ) построен (рис. 7.18). Время выполнения отдельных работ измерено, например, в неделях. За какое время можно выполнить все работы?

По данному сетевому графику нетрудно видеть, что для реализации проекта потребуется не меньше 11 недель. (Подумайте, почему, например, за 9 недель все работы этого комплекса выполнить не удастся.)

Выясним, как по любому сетевому графику определить время, необходимое для реализации соответствующего проекта.

Заметим, что почти в любой сети от исходного события до завершающего ведет несколько путей. Каждому пути соответствует последовательность каких-то работ. Путь в сети от исходного события до завершающего называют *полным путем*. Полный путь будем обозначать L. *Продолжительностью пути* в сетевом графике называют время, необходимое для выполнения всех работ, лежащих на этом пути. Продолжительность полного пути L будем обозначать $t(L)$.

В сетевом графике на рисунке 7.18 от исходного события 0 до события 7 ведут 3 пути. Обозначим их L_1, L_2, L_3. Пусть L_1 проходит через вершины 0, 1, 5, 7; L_2 — через вершины 0, 3, 7; L_3 — через вершины 0, 2, 4, 6, 7. Вычислим их продолжительность:

$$t(L_1) = 3 + 4 + 2 = 9; \qquad t(L_2) = 5 + 6 = 11;$$
$$t(L_3) = 1 + 2 + 2 + 3 = 8.$$

Сравнив $t(L)$ для всех полных путей в сетевом графике на рисунке 7.18, убеждаемся, что продолжительность самого «неблагоприятного» пути равна 11 неделям. Соответствующий проект не может быть реализован меньше чем за 11 недель.

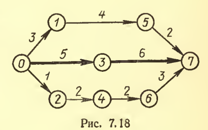


Рис. 7.18

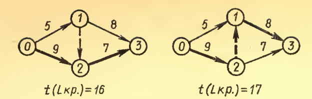


Рис. 7.19

Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется *критическим путем*. Критический путь будем обозначать $L_{кр}$. На рисунке 7.18 критический путь проходит через вершины 0, 3 и 7.

Для определения времени, необходимого для реализации проекта, достаточно найти критический путь и вычислить его продолжительность. Продолжительность критического пути будем обозначать $t\ (L_{кр})$. Заметим, что в сети может быть несколько критических путей.

Работы, лежащие на критическом пути, называются *критическими*. От их продолжительности зависит общий срок завершения всех работ. Сокращение или увеличение сроков выполнения критических работ соответственно сокращает или увеличивает общую продолжительность выполнения проекта. На сетевом графике работы, лежащие на критическом пути, обозначают более жирными стрелками. Заметим, что направление штриховой стрелки влияет на продолжительность критического пути (рис. 7.19).

Работы, не лежащие на критическом пути, называются некритическими. Некритические работы допускают некоторое запаздывание в их выполнении, которое не задержит сроков реализации всего проекта.

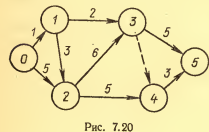


Рис. 7.20

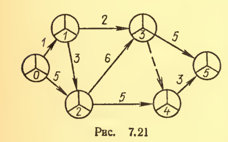


Рис. 7.21

Существуют различные алгоритмы для отыскания критического пути и для определения его продолжительности. Мы познакомимся с одним из них[1].

Рассмотрим сетевой график на рисунке 7.20. Разделим кружки, которыми обозначены события, на 3 сектора. В нижнем секторе будем проставлять номера событий (рис. 7.21). Начнем определять критический путь. Для каждого события i

[1] Все алгоритмы отыскания критического пути основаны на теореме оптимальности из теории динамического программирования (см. § 10 в книге [28]).

определим наиболее ранний из возможных сроков наступления, который обозначим $t_р(i)$. На сетевом графике $t_р(i)$ будем проставлять в левом секторе.

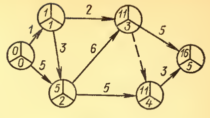


Рис. 7.22

Договоримся, что наиболее ранний срок наступления событий 0 обозначим нулем, то есть $t_р(0) = 0$. Начнем последовательно рассматривать все вершины: $t_р(1) = 0 + 1$, так как только один путь ведет от исходного события к событию 1; к событию 2 ведут два ребра $\langle 1; 2\rangle$, $\langle 0; 2\rangle$ и $t_р(2) = \max\{(1 + 3); 5\} = 5$. Это означает, что наступление события 2 нельзя ожидать раньше чем через 5 (недель).

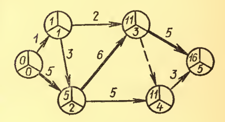


Рис. 7.23

К событию 3 тоже ведут два ребра $\langle 1; 3\rangle$, $\langle 2; 3\rangle$ и $t_р(3) = \max\{(1 + 2); (5 + 6)\} = 11$. Это означает, что наступления события 3 нельзя ожидать раньше чем через 11 (недель) (рис. 7.22). Аналогично подсчитываем, что

$t_р(4) = \max\{(5 + 5); 11\} = 11;$
$t_р(5) = \max\{(11 + 5); (11 + 3)\} = 16.$

Число 16 представляет собой время выполнения всего проекта (рис. 7.22).

Путь, соответствующий этому времени в 16 недель, получить нетрудно. Шаг за шагом восстановим тот путь, который определил ранний срок наступления завершающего события, равный 16.

От вершины 5 вернемся к той вершине, ребро из которой определило $t_р(5) = 16$. Это ребро $\langle 3; 5\rangle$. От вершины 3 вернемся к той вершине, из которой выходит ребро, определившее $t_р(3) = 11$. Это ребро $\langle 2; 3\rangle$. От вершины 2 вернемся к той вершине, из которой выходит ребро, определившее $t_р(2) = 5$. Это ребро $\langle 0; 2\rangle$. Все найденные ребра образуют критический путь. На рисунке 7.23 он обозначен жирными стрелками.

Работы $\langle 0; 2\rangle$, $\langle 2; 3\rangle$, $\langle 3; 5\rangle$ являются критическими. Именно с этих работ нужно начинать после наступления соответствующих событий. Так, например, после наступления события 2 в первую очередь нужно начать работу $\langle 2; 3\rangle$. Если ее задержать, то это вызовет запаздывание выполнения всего проекта.

Некритические работы имеют некоторые резервы времени. Выполнение, например, работы $\langle 4; 5\rangle$ можно задержать при необходимости на 2 недели, если все остальные выполнены в срок.

Сформулируем общее правило определения $t_р(i)$.

1. $t_р(0) = 0$.

2. $t_р(i)$ равно продолжительности наиболее «неблагоприятного» пути, ведущего от 0 к i.

Как определить $t_р(i)$? Для этого рассматривают все работы, непосредственно предшествующие событию i. Для каждой из этих работ складывают ее продолжительность и ранний срок наступления события, непосредственно предшествующего этой работе; сравнивают эти суммы. Наибольшая из них определяет $t_р(i)$.

Заметим, что при этом определяют раннее окончание работ, непосредственно предшествующих событию i, сравнивают их и находят наибольшее из них. Если раннее окончание работы $<k; i>$ обозначить $t_{р.о} < k; i>$, то получим, что:

$$t_р(i) = \max_{0 \leqslant k < n} [t_{р.о.} < k; i>].$$

Упражнения

7.26. Определите критический путь и ранние из возможных сроков наступления завершающего события и событий под номерами 3, 5, 6, если сетевой график дан: а) на рисунке 7.24; б) на рисунке 7.25; в) на рисунке 7.26; г) на рисунке 7.27.

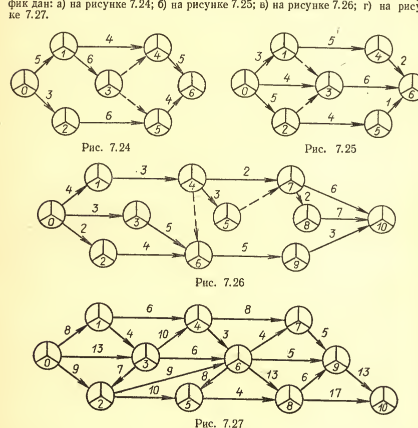


Рис. 7.24

Рис. 7.25

Рис. 7.26

Рис. 7.27

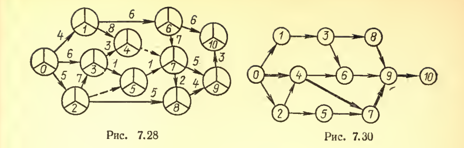


Рис. 7.28 Рис. 7.30

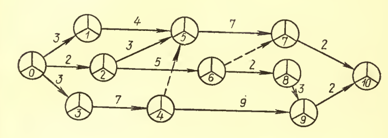


Рис. 7.29

7.27. По сетевому графику на рисунке 7.28 определите критический путь и ранний из возможных сроков наступления завершающего события.

7.28. По сетевому графику на рисунке 7.29 определите критический путь и ранний из возможных сроков наступления завершающего события.

7.29. Проставьте над ребрами в сетевом графике (рис. 7.30) время, необходимое для выполнения соответствующих работ, так, чтобы выделенный жирными линиями путь оказался критическим.

§ 4. О РЕЗЕРВАХ ВРЕМЕНИ

Известно, что некритические работы допускают некоторое запаздывание в их выполнении. Для некритических событий можно определить некоторый интервал времени, в течение которого наступление данного события не повлияет на время завершения всего комплекса, то есть резерв времени события. При выполнении проекта важно бывает определить резервы времени какого-то события i. Это дает возможность узнать время, на которое можно увеличить срок выполнения какой-то из работ.

Поздний срок наступления события — самый поздний срок наступления события, при котором планируемый срок окончания проекта не меняется.

Поздний срок наступления события i обозначим $t_п(i)$ и на сетевом графике будем проставлять в правом секторе (рис. 7.31).

Заметим, что для завершающего события k поздний срок наступления совпадает с ранним сроком наступления, то есть $t_р(k) = t_п(k)$.

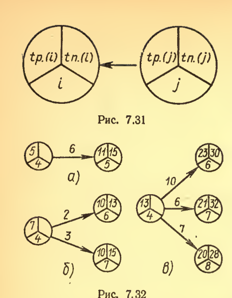


Рис. 7.31

Рис. 7.32

При определении поздних сроков наступления событий расчет ведут от завершающего события к исходному.

Рассмотрим три фрагмента сетевых графиков, представленных на рисунке 7.32, и подсчитаем для каждого из них $t_{\text{п}}(4)$. (Заметим, что поздние сроки следующих событий уже известны и проставлены в правых секторах.)

На рисунке 7.32 (а) за событием 4 следует работа $<4;\,5>$, причем $t<4;\,5>=6$. Это означает, что работа $<4;\,5>$ может начаться не позднее чем за 6 недель до события 5. Известно еще, что $t_{\text{п}}(5)=15$, следовательно, поздний срок свершения 4 события $t_{\text{п}}(4) = 15 - 6 = 9$.

На рисунке 7.32 (б) за событием 4 следуют две работы, причем $t<4;\,6>= 2$ и $t<4;\,7> = 3$. Работа $<4;\,6>$ может начаться не позднее чем за 2 недели до события 6, а работа $<4;\,7>$ — не позднее чем за 3 недели до события 7. Так как $t_{\text{п}}(6) = 13$, а $t_{\text{п}}(7) = 15$, то поздний срок наступления события 4 равен наименьшей из разностей:

$$t_{\text{п}}(4) = \min\,[(13-2);\,(15-3)] = 11.$$

Если событие 4 наступит позднее, то работа $<4;\,6>$ не закончится на 13-й неделе; и это вызовет задержку наступления события 6.

На рисунке 7.32 (в) за событием 4 следуют три работы, причем $t<4;\,6> = 10$, $t<4;\,7> = 6$ и $t<4;\,8> = 7$. Работа $<4;\,6>$ может начаться не позднее чем за 10 недель до события 6; работа $<4;\,7>$ — не позднее чем за 6 недель до события 7; работа $<4;8>$ — не позднее чем за 7 недель до события 8. Так как $t_{\text{п}}(6) = 30$, $t_{\text{п}}(7) = 32$, а $t_{\text{п}}(8) = 28$, то поздний срок наступления события 4 равен наименьшей из разностей:

$$t_{\text{п}}(4) = \min\,[(30-10);\,(32-6);\,(28-7)] = 20.$$

Следовательно, $t_{\text{п}}(4) = 20$. Если событие 4 наступит позднее чем на 20-й неделе, то работа $<4;\,6>$ не закончится на 30-й неделе, и это увеличит срок завершения всего комплекса.

Теперь нетрудно определить резервы времени для каждого из событий. Например, на рисунке 7.32 (б) событие 4 может произойти на отрезке времени [7; 11]; событие 6 — на отрезке [10; 13], событие 7 — на отрезке [10; 15]. Время их наступления в этих интервалах не повлияет на срок выполнения всего комплекса.

Определим поздние сроки наступления событий по сетевому графику на рисунке 7.33 (этот график был уже рассмотрен в § 3). В правый сектор завершающего события 5 поставим $t_{\text{п}}(5) = t_{\text{р}}(5) = 16$.

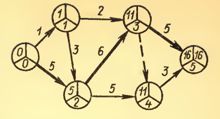


Рис. 7.33

Рассмотрим теперь событие 4; $t\langle 4; 5\rangle = 3$, так что работа $\langle 4; 5\rangle$ может начаться не позднее чем за 3 недели до события 5. Поздний срок наступления события 4 равняется $16 - 3 = 13$. Поставим 13 в правый сектор соответствующей вершины на сетевом графике.

Событие 3 отделено от события 5 работой $\langle 3; 5\rangle$ и от события 4 работой $\langle 3; 4\rangle$, причем $t\langle 3; 5\rangle = 5$, $t\langle 3; 4\rangle = 0$. Работа $\langle 3; 5\rangle$ может начаться не позднее чем за 5 недель до события 5, а работа $\langle 3; 4\rangle$ — фиктивная, но она показывает зависимость событий 3 и 4; а именно поздний срок наступления события 3 не может быть больше чем 13.

Таким образом, поздний срок наступления события 3 определяется наименьшей из разностей: $16 - 5 = 11$ и $13 - 0 = 13$. Следовательно, $t_{\text{п}}(3) = 11$. (Ставим 11 в правый сектор.)

Событие 2 отделено от события 4 работой $\langle 2; 4\rangle$ и от события 3 работой $\langle 2; 3\rangle$. Выбираем наименьшую из разностей: $t_{\text{п}}(3) - t\langle 2; 3\rangle = 11 - 6 = 5$; $t_{\text{п}}(3) - t\langle 2; 4\rangle = 13 - 5 = 8$.

Следовательно, $t_{\text{п}}(2) = 5$. Событие 2 должно наступить не позднее чем на 5-й неделе, так как иначе задержится общий срок завершения всего комплекса. (Ставим 5 в правый сектор.)

Аналогично определяем поздний срок наступления события 1:
$t_{\text{п}}(1) = \min\{[t_{\text{п}}(3) - t\langle 1; 3\rangle];\ [t_{\text{п}}(2) - t\langle 1; 2\rangle]\} = \min\{[11 - 2];\ [5 - 3]\} = \min\{9; 2\} = 2.$

Естественно, что поздний срок наступления исходного события 0 должен равняться 0.

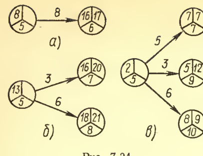
Заметим, что для событий i, лежащих на критическом пути, ранние и поздние сроки наступлений совпадают, то есть $t_{\text{п}}(i) = t_{\text{р}}(i)$.

Подведем итоги. Поздние сроки наступления событий по сетевому графику можно определять в следующем порядке.

1. Определить поздний срок наступления завершающего события. Если завершающее событие обозначено j, то $t_{\text{п}}(j) = t_{\text{р}}(j)$.

2. От завершающего события идем последовательно к исходному. Для всякого промежуточного события i определяем поздние сроки начала всех работ, начинающихся сразу после этого; находим среди них самый ранний, который равен $t_{\text{п}}(i)$.

Понятия ранних и поздних сроков наступления событий играют важную роль в процессе выполнения проекта. Если все события i наступают не позднее $t_{\text{п}}(i)$, то это означает, что проект осуществ-



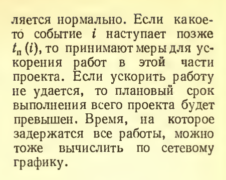


Рис. 7.34

ляется нормально. Если какое-то событие i наступает позже $t_п(i)$, то принимают меры для ускорения работ в этой части проекта. Если ускорить работу не удается, то плановый срок выполнения всего проекта будет превышен. Время, на которое задержатся все работы, можно тоже вычислить по сетевому графику.

Упражнения

7.30. На рисунке 7.34 даны фрагменты сетевых графиков. Определите поздний срок наступления события 5 и резервы времени для каждого события (отрезки времени, в течение которых могут наступать события без срывов общих сроков).

7.31. По сетевому графику на рисунке 7.35 определите поздний срок наступления каждого события и резерв времени.

7.32. Для каждого события по сетевому графику (рис. 7.36) определите поздний срок наступления и резерв времени.

7.33. По сетевому графику на рисунке 7.37 определите:

а) ранние сроки наступлений событий;

б) критический путь;

в) резервы времени каждого из событий.

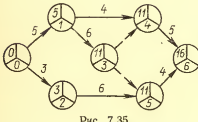


Рис. 7.35

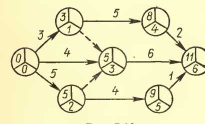


Рис. 7.36

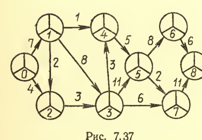


Рис. 7.37

Подведем некоторые итоги. Мы познакомились с одним из методов расчета сетевых графиков. Такой расчет сетевого графика выполняется в четыре этапа:

1) определение ранних сроков наступления событий—$t_р(i)$;

2) нахождение критического пути;

3) определение поздних сроков наступления событий—$t_п(i)$;

4) определение резерва времени события.

§ 5. ИЗ ИСТОРИИ СИСТЕМЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

В современных условиях при реализации многих проектов выполняются тысячи взаимосвязанных работ-операций. Сети оказались естественным и удобным средством для описания и анализа сложных проектов.

Сетевые модели сложных комплексов работ были разработаны и начали использоваться совсем недавно, в 50-х годах нашего столетия.

Сетевая модель была применена в США при создании баллистических ракет «Поларис», предназначенных для оснащения атомных подводных лодок американского военно-морского флота. В сложном комплексе работ при этом участвовало свыше 6000 фирм, работы выполнялись на территории 48 штатов Америки, а сетевой график включал в себя более 10 000 событий. Сейчас в США сетевые методы планирования и управления получили широкое распространение. Первая и наиболее распространенная система планирования и управления в США носит название системы «ПЕРТ». Преимущества, полученные в результате ее применения, оказались настолько значительными, что в США ни одна строительная фирма не ведет строительство без использования системы «ПЕРТ» или ее разновидностей. Ни одна фирма не получает правительственного контракта на выполнение новых заказов, если она не освоила систему «ПЕРТ». Американские экономисты подсчитали, что сети позволяют на треть сократить продолжительность работ.

В нашей стране разработаны несколько иные системы планирования и управления, коротко называемые «СПУ». В основе этих систем тоже лежат сетевые графики. Применяются и другие методы организационного управления, но системы «СПУ» получили наибольшее распространение. Системы «СПУ» были успешно применены, например, при сооружении ТЭЦ в Лисичанске, Буштырской тепловой электростанции, Челябинского блюминга-автомата «1300», при ремонте мартеновской печи завода «Серп и молот», при реконструкции доменной печи в «Запорожстали», при строительстве метромоста через Днепр в Киеве, комплекса жилых и общественных зданий на проспекте Калинина в Москве и т. д.

В настоящее время все большее число строек, предприятий, научно-исследовательских институтов и проектных организаций страны переключаются на планирование и оперативное управление крупными комплексами работ с помощью систем «СПУ».

Обозримость сетевого графика или его частей значительно облегчает восприятие существа всей системы, взаимосвязей всех работ, упрощает весь последующий процесс по руководству системой при ее реализации. Дело, конечно, не в самом сетевом графике, а в той организационной системе, которая осуществляется с его помощью.

Сети небольшого объема с успехом могут обрабатываться вручную или с использованием счетно-клавишных машин. Сети с большим числом событий обрабатываются, конечно, с помощью ЭВМ. Если система СПУ охватывает тысячи событий, то специалисты составляют «частные» графики. ЭВМ «сшивают» их в огромную единую сеть, которую никто и никогда не видит. В таких случаях всю тяжесть расчетов и сопоставлений человек перекладывает на ЭВМ. Она становится единственной хранительницей информации о всем сетевом графике. Человек, вложив в машину данные о каждой конкретной работе, может получить от машины все нужные ему сведения.

Конечно, системы «СПУ» не идеальны, они пока не дают возможности вести управление при одновременном учете всех параметров (и времени, и стоимости, и ресурсов, и технико-экономических показателей), тем не менее их методы являются весьма эффективными.

Методы «СПУ» отвечают потребностям тех, кто имеет дело с выполнением проектов или крупных комплексов работ. Это один из методов исследования операций, но он не требует никаких предварительных специальных знаний. Все понятия, с которыми приходится сталкиваться при его использовании, просты и воспринимаются интуитивно. Специалисты считают системы «СПУ» крупнейшим за последние годы достижением научной организации труда и утверждают, что за системами «СПУ» большое будущее.

В этой главе мы познакомились с основными принципами построения и расчета сетевых графиков, лежащих в основе систем «СПУ»[1].

---

[1] Желающие глубже познакомиться с системами «СПУ» могут обратиться к специальной литературе, указанной в конце книги.

ГРАФЫ И МАТРИЦЫ

При большом числе вершин и ребер рнсунок графа теряет наглядиость. В таких случаях для задания графов и работы с ними используются таблицы специального вида, называемые матрицами. Матричный эквивалеит графа используется в работе с графами на ЭВМ. В то же время графы помогают сделать более естественным введеине операций над матрнцами, в том числе и операции умиожения.

§ 1. МАТРИЦЫ ГРАФА

Матрицей порядка $(m \times n)$ называется таблнца из mn элементов, расположеиных в m строках и n столбцах. Так, в приведенной ииже матрице $m = 3$, $n = 4$, т. е. элемеиты в этой матрице расположеиы в трех строках и четырех столбцах. Строкн иумеруют сверху вниз, а столбцы — слева направо. Каждому $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ элемеиту матрицы присваивают два индекса: первый индекс указывает на номер строки, которой прииадлежит элемент, второй — на номер соответствующего столбца. Напрнмер, если элементы приведенной матрицы обозиачить b_{ij}, то $b_{11} = 0$, $b_{12} = 1$, $b_{14} = 7$, $b_{32} = 3$, т. е. элемент b_{11} иаходится иа пересечеиии первой строки и первого столбца, элемент b_{12} — на пересечеиии первой строки и второго столбца и т. д.

В общем виде матрнцу M из трех строк и четырех столбцов можно записать так:

$$M = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

или коротко: $M = (b_{ij})$, где $1 \leqslant i \leqslant 3$ и $1 \leqslant j \leqslant 4$.

Матрица порядка $(n \times n)$, в которой чнсло строк равно числу столбцов, называется *квадратной матрицей* порядка $(n \times n)$.

Две матрицы называют *равными*, еслн они одного порядка и все соответствующие элементы их попарио равны.

Составим несколько матриц, описывающих заданные графы и некоторые их свойства.

Опишем граф с семью вершинами, изображенный на рисунке 8.1 матрицей. Для этого каждой вершнне B_i поставим в соответствие строку и столбец с иомером i, причем

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } < B_i; B_j > \in \Gamma. \\ 0, \text{ если ребро } < B_i; B_j > \bar{\in} \Gamma; \end{cases}$$

Такая матрица иазывается матрицей смежностей графа Г. Обозиачают ее $M_{см}$ или M (Г).

Прнводим матрицу смежностей для графа, изображенного на рисунке 8.1.

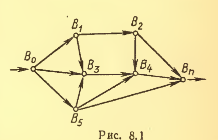


Рис. 8.1

$$M_{\text{см}} = \begin{array}{c} \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Всякий граф можно задать матрицей смежностей. Любую квадратную матрицу, состоящую только из нулей и единиц, можно рассматривать как матрицу смежностей некоторого графа, и по ней построить соответствующий граф. Информацию о графе с помощью матрицы смежностей можно хранить без изображения графа, ее можно передавать в «память машины».

Пусть на рисунке 8.1 изображена схема улиц части города, в котором вводится одностороннее движение. Поворотам и перекресткам улиц соответствуют вершины графа, улицам — ребра. Удачен ли предложенный вариант одностороннего движения? Из каждой ли вершины графа можно попасть в любую другую? Если нет, то укажите, из какой вершины графа в какую нет пути. Эту информацию можно считать с графа и зафиксировать с помощью матрицы, называемой *матрицей достижимостей графа.* Обозначается она D (Г). По графу Г на рисунке 8.1 составим квадратную матрицу $D = (b_{ij})$, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } B_j \text{ достижима из } B_i; \\ 0, & \text{если } B_j \text{ не достижима из } B_i. \end{cases}$$

Вершину B_j называют достижимой из B_i, если существует путь, ведущий из B_i в B_j. Считают, что каждая вершина графа достижима сама из себя; а поэтому элементы на «главной диагонали» в матрице D (Г) все равны 1.

$$D\,(\Gamma) = \begin{array}{c} \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

По матрице D (Г) видно, например, что из вершины B_n нет пути ни в одну из остальных вершин графа.

По графу на рисунке 8.1 построим еще одну матрицу $S\,(\Gamma) = (s_{ij})$, в которой элемент s_{ij} показывает расстояние в графе от B_i до B_j. Такую матрицу называют *матрицей расстояний графа.* Расстоянием от B_i до B_j в графе называют минимальное число ребер пути, соединяющего B_i с B_j. Расстояние от B_i до B_i считают равным нулю. Полагают равным бесконечности s_{ij}, если путь из B_i в B_j нет.

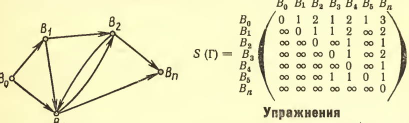


Рис. 8. 2

$$S\,(\Gamma) = \begin{array}{c} \\ B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 0 & 1 & 1 & 2 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Упражнения

8.1. Назовите номера строки и столбца матрицы, на пересечении которых находятся элементы: b_{34}, b_{41}, b_{16}, b_{57}.

8.2. Запишите в общем виде матрицу из четырех строк и четырех столбцов.

8.3. Постройте матрицу смежностей графа, изображенного на рисунке 4.6 (стр. 64).

8.4. Изобразите графы, соответствующие матрицам смежностей:

$$\text{а) } M_{\text{см}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } M_{\text{см}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.5. Граф задан матрицей смежностей. Как по этой матрице определить:

а) число вершин графа;

б) число ребер, выходящих из вершины B_i;

в) число ребер, входящих в вершину B_i;

г) число ребер в ориентированном графе?

8.6. Какой особенностью обладает граф, если в матрице смежностей все элементы на «главной диагонали» равны нулю?

8.7. Составьте матрицу достижимостей и матрицу расстояний для графа на рисунке 8.2.

§ 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Задачи, возникающие на практике, приводят к разного вида операциям над матрицами. Познакомимся с некоторыми из них.

Пусть система авиалиний между городами X_1, X_2, X_3 одной страны и городами Y_1 и Y_2 другой страны задается подмножеством пар: (X_1, Y_1), (X_1, Y_2), (X_2, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_2), т. е. множеством ребер соответствующего графа. Система связи между этими же городами водным транспортом задается другим подмножеством пар: (X_1, Y_1), (X_2, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_1). Кроме этого, для каждой пары городов (X_i, Y_j) известно число различных водных и авиамаршрутов. Эти числа можно проставить над ребрами на рисунке графа или зафиксировать с помощью двух матриц одинакового порядка:

$$A = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}\!\!\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}\!\!\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Требуется определить, сколькими различными способами с помощью воздушного или водного транспорта можно попасть из каждого города одной страны в каждый город другой страны.

Естественно, что для этого достаточно сложить соответствующие элементы матриц A и B. Ответ можно записать с помощью новой матрицы того же порядка:

$$C = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}\!\!\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

В общем случае операцию *сложения* двух матриц можно записать так: если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы одного порядка, то матрица $C = A + B = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пусть теперь между городами X_1, X_2, X_3 одной страны и городами Y_1, Y_2 другой страны установлена связь железнодорожным и водным видами транспорта, а матрицами A и B

$$A = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}\!\!\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}\!\!\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

задано время, которое необходимо затратить соответствующим видом транспорта на дорогу из города X_i в город Y_j или обратно.

Если требуется сэкономить время, то при выборе маршрута естественно определить наименьшее время, за которое можно добраться из одного города в другой одним из видов транспорта. Для этого достаточно сравнить попарно числа вида a_{ij} и b_{ij}. Для решения такой задачи в общем виде достаточно построить матрицу $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \min \{a_{ij}; b_{ij}\}$.

Упражнения

8.8. Докажите, что операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения чисел: 1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

8.9. Придумайте задачу, при решении которой нужно по двум матрицам $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного порядка найти третью матрицу $C=(c_{ij})$ того же порядка, где

1) $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

2) $c_{ij} = \min \{a_{ij}; b_{ij}\}$;

3) $c_{ij} = \max \{a_{ij}; b_{ij}\}$.

Рассматривается система авиалиний между аэропортами трех стран, причем аэропорты X_1 и X_2 принадлежат первой стране, аэропорты Y_1, Y_2, Y_3 принадлежат второй стране, аэропорты Z_1, Z_2 принадлежат третьей стране. Существующие авиалинии заданы подмножеством пар $\{(X_1, Y_1), (X_1, Y_2), (X_2, Y_1), (X_2, Y_2), (X_2, Y_3), (Y_1 Z_1), (Y_2, Z_1), (Y_2, Z_2), (Y_3, Z_1)\}$, т. е. множеством ребер соответствующего графа. Требуется определить число возможных авиамаршрутов из каждого аэропорта первой страны в любой аэропорт третьей страны, проходящих через аэропорты второй страны.

Если сделать рисунок соответствующего графа, то с его помощью нетрудно решить задачу. Но мы хотим эту задачу передать машине, и поэтому нас интересует алгебраическое решение.

Систему связей между первой и второй странами зафиксируем с помощью матрицы A, в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если аэропорт } X_i \text{ связан с } Y_j; \\ 0, \text{ если аэропорт } X_i \text{ не связан с } Y_j. \end{cases}$$

Систему связей между второй и третьей странами зафиксируем матрицей B, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если аэропорт } Y_i \text{ связан с } Z_j; \\ 0, \text{ если аэропорт } Y_i \text{ не связан с } Z_j. \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ X_1 & 1 & 1 & 0 \\ X_2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ Y_1 & 1 & 0 \\ Y_2 & 1 & 1 \\ Y_3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

С помощью матриц A и B найдем число возможных авиамаршрутов из каждого аэропорта первой страны в каждый аэропорт третьей страны, проходящих через аэропорты второй страны. Для этого определим матрицу C, в которой элемент c_{ij} равен числу маршрутов от X_i до Z_j:

$$C = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ X_1 & c_{11} & c_{12} \\ X_2 & c_{21} & c_{22} \end{matrix}$$

Определим c_{11}, т. е. число маршрутов от X_1 до Z_1, проходящих через Y_1, Y_2 и Y_3. Для этого потребуются элементы 1-й строки матрицы A и 1-го столбца матрицы B. Выпишем их парами: $a_{11} = 1$ и $b_{11} = 1$, это означает, что существует путь $\langle X_1; Y_1\rangle$, $\langle Y_1; Z_1\rangle$; $a_{12} = 1$ и $b_{21} = 1$, это означает, что существует путь $\langle X_1; Y_2\rangle$, $\langle Y_2; Z_1\rangle$; $a_{13} = 0$ и $b_{31} = 1$, это означает, что не существуют пути $\langle X_1; Y_3\rangle$, $\langle Y_3; Z_1\rangle$. Никаких других путей от X_1 до Z_1 нет, следовательно, $c_{11} = 2$. Для определения c_{11} можно записать формулу:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Определим c_{12}, т. е. число всевозможных маршрутов от X_1 до Z_2, проходящих через Y_1, Y_2 и Y_3. Для этого выпишем элементы 1-й строки матрицы A и элементы 2-го столбца матрицы B.

$a_{11} = 1$ и $b_{12} = 0$, т. е. не существует пути $\langle X_1; Y_1\rangle$, $\langle Y_1; Z_2\rangle$.
$a_{12} = 1$ и $b_{22} = 1$, т. е. существует путь $\langle X_1; Y_2\rangle$, $\langle Y_2; Z_2\rangle$.
$a_{13} = 0$ и $b_{32} = 0$, т. е. не существует пути $\langle X_1; Y_3\rangle$; $\langle Y_3; Z_2\rangle$.

Из этого следует, что $c_{12} = 1$. Можем записать формулу:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}.$$

Аналогично рассуждая, найдем элементы c_{21} и c_{22} и формулы:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31};$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

Получена матрица

$$C = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ X_1 & 2 & 1 \\ X_2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

и одновременно получено правило образования матрицы C. Матрицу C называют произведением матрицы A на матрицу B и записывают: $C = AB$.

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть в каких-то трех странах выделены некоторые города, связанные транспортом четырех видов: воздушным, железнодорожным, водным и автобусным. Схема транспортных связей между городами X_1 и X_2, принадлежащими первой стране, и городами Y_1, Y_2, Y_3, принадлежащими второй стране, зафиксирована матрицей A, где a_{ij} показывает на число видов транспорта, соединяющего города X_i и Y_j. Аналогичная схема транспортных связей между городами Y_1, Y_2, Y_3, принадлежащими второй стране, и городами Z_1, Z_2, принадлежащими третьей стране, представлена матрицей B. Какие конкретно виды транспорта связывают пары городов, нас не интересует. Города первой и третьей стран непосредственных связей не имеют.

$$A = \begin{matrix} & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ X_1 & 4 & 0 & 2 \\ X_2 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ Y_1 & 2 & 1 \\ Y_2 & 0 & 3 \\ Y_3 & 3 & 0 \end{matrix}$$

Требуется подсчитать число различных маршрутов от каждого из городов первой страны в каждый из городов третьей страны, проходящих через вторую страну.

Если нарисовать соответствующую схему, то решить задачу нетрудно, но мы хотим эту задачу передать машине, которая рисунок «не увидит».

Таким образом, по заданным матрицам A и B требуется определить элементы c_{ij} матрицы C:

$$C = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ X_1 & c_{11} & c_{12} \\ X_2 & c_{21} & c_{22} \end{matrix}$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при решении предыдущей задачи, определяют матрицу C и алгоритм нахождения элементов c_{ij}, а именно

$$C = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ X_1 & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ X_2 & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{matrix},$$

т. е.

$$C = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ X_1 & 14 & 4 \\ X_2 & 7 & 11 \end{matrix}$$

Подведем некоторые итоги. Рассмотренные задачи убеждают в целесообразности введения еще одной операции над матрицами. Эту операцию принято называть операцией *умножения* матриц. Запишем правило образования элементов матрицы-произведения.

Если $C = AB$, то элементы матрицы C определяются следующей формулой:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Таким образом, элемент c_{ij} образуется из элементов i-й строки матрицы A и элементов j-го столбца матрицы B.

Следует обратить внимание на следующие два факта: 1) Операция умножения матрицы A на матрицу B определена только в том случае, если число столбцов в матрице A равно числу строк в матрице B. 2) Если матрица A имеет порядок $(m \times n)$, а матрица B — порядок $(n \times r)$, то матрица-произведение $C = AB$ имеет порядок $(m \times r)$.

Операция умножения матриц обладает рядом свойств, на первый взгляд неожиданных и необычных для умножения чисел. Графы помогают объяснить и эти особенности.

Упражнения

8.10. Найдите произведение матрицы A на B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.11. Матрица A имеет порядок (3×4), а матрица B — порядок (4×6). Определите порядок матрицы AB.

8.12. Даны две матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Найдите произведения AB и BA. Сравните их. Изобразите соответствующие графы и найдите трактовку того факта, что $AB \neq BA$.

8.13. Заданы две матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Найдите произведения AB и BA и проверьте, что $AB = O$, а $BA \neq O$, где O — матрица, все элементы которой равны 0.

Проиллюстрируйте этот факт рисунками соответствующих графов, изображающих, например, схемы связей между городами трех стран.

ЧТО ЧИТАТЬ ДАЛЬШЕ

Для желающих продолжить изучение теории графов мы сообщаем, в каких книгах, в каких главах и параграфах можно найти материал по тем или иным вопросам, и приводим список литературы.

Наиболее доступной и занимательной в чтении является книга О. Оре «Графы и их применение» [4]. Порекомендовать ее можно и школьникам, которые хотят углубить свои знания в математике. Содержание книги концентрируется около основных понятий теории графов.

В той же популярной серии — «Современная математика» — выпущена книга И. Гроссмана и В. Магнуса — «Группы и их графы» [10]. Центральными в книге являются понятия теории групп. Графы здесь «обслуживают» теорию групп. Добавим к этому, что с группами в той или иной мере сталкивается фактически каждый, кто серьезно занимается математикой или ее приложениями.

Книги, тесно связанные с графами, выпущены в серии «Математическая библиотечка». Так, книга Г. Хадвигера и Г. Дебруннера — «Комбинаторная геометрия на плоскости» [9] — содержит геометрические увлекательные задачи теории графов, которые находят применение в социологии и экономике.

Представление об использовании теории графов в задачах геометрической оптимизации вы можете получить, познакомившись с серьезной книгой Т. Саати «Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы» [24] .В книге собрана коллекция задач и методов, которые относятся к разделу современной математики, носящему название «Исследование операций».

Шестая глава книги Дж. Риордана «Введение в комбинаторный анализ» [17] посвящена применению теории графов в комбинаторике. Очень много упражнений, решаемых с помощью методов теории графов, содержит книга А. Кофмана «Введение в прикладную комбинаторику» [15].

Используются графы и в решении задач теории вероятностей. Характерна в этом отношении увлекательно написанная книга Б. А. Кордемского «Математика изучает случайности» [14]. Другие задачи из теории вероятностей вы найдете в книге В. П. Сигорского «Математический аппарат инженера» [6]. В этой книге можно найти и немало других приложений теории графов, в том числе в математической логике. Интересна по подбору разнообразных несложных задач прикладного содержания книга Дж. Кемени, Дж. Снелла и Дж. Томпсона «Введение в конечную математику» [13]. Методы теории графов плодотворно используются для введения в теорию случайных процессов в книге Дж. Кемени, Дж. Снелла «Конечные цепи Маркова» [13]. Книга Р. Басакера и Т. Саати «Конечные графы и сети» [1] содержит, кроме вопросов, относящихся непосредственно к математике, две главы, посвященные только приложениям теории графов. Здесь вы найдете задачи, относящиеся к планированию производства, печатным схемам в радиотехнике, органической химии, генетике, статистической механике и т. п.

Многократно используются графы при решении разнообразных практических и игровых задач в сборниках очерков М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» [65], «Математические досуги» [66], «Математические новеллы» [67].

Один из путей дальнейшего развития методов сетевого планирования и управления, с которыми вы познакомились в главе VII, приводит к такой высокоэффективной в приложениях области современной математики, как динамическое программирование. Желающие могут обратиться к книге Е. С. Вентцель «Элементы динамического программирования» [22].

Укажем также на книгу «Прикладная комбинаторная математика» [16], представляющую собой сборник статей различных авторов. В ряде статей поставлены интересные проблемы, часть из которых еще не решена. Особое внимание рекомендуем обратить на две статьи в этом сборнике: Г. Гамов «Комбинаторные принципы в генетике»; Ф. Харари «Комбинаторные задачи перечисления графов». На основе этой статьи выросла книга: Ф. Харари, Э. Палмер «Перечисление графов» (М., Мир, 1977).

Помимо книг, аннотированных выше, приведены другие, свидетельствующие о разнообразных направлениях исследований в теории графов и ее приложениях.

ЛИТЕРАТУРА

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974.
2. Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.
3. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, Наука, 1969.
4. Оре О. Графы и их применение. М., Мир, 1965.
5. Оре О. Теория графов. М., Наука, 1968.
6. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. Киев, Техника, 1975.
7. Харари Ф. Теория графов. М., Мир, 1973.
8. Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов. М., Высшая школа, 1976.

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

В МАТЕМАТИКЕ

В геометрии

9. Хадвигер Г., Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости (§ 9). М., Наука, 1965.

В теории групп

10. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. М., Мир, 1971.

В комбинаторике и теории вероятностей

11. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 5—7.
12. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М., Наука, 1970.
13. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М., ИЛ, 1963, гл. IV.
14. Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. Пособие для учащихся. М., Просвещение, 1975.
15. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М., Наука, 1975.
16. Прикладная комбинаторная математика. Сб. статей. М., Мир, 1968.
17. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛ, 1963.

В математической лингвистике

18. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 28.
19. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., Наука, 1971.
20. Братчиков И. Л. Синтаксис языков программирования. М., Наука, 1975.
21. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М., Мир, 1977.

Экстремальные задачи, решаемые с помощью графов

22. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования. М., Наука, 1964.
23. Кофман А., Фор Р. Займемся исследованием операций. М., Мир, 1966.
24. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М., Мир, 1973.

В СЕТЕВОМ ПЛАНИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ

25. Абрамов С. А. и др. Сетевые методы планирования и управления. М., Советское радио, 1965.

26. Бороздин И. Г. Сетевое планирование и управление в строительстве. М., Стройиздат, 1972.

27. Бурков В. Н. и др. Сетевые модели и задачи управления. М., Советское радио, 1967.

28. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования и их применение. М., Прогресс, 1968.

29. Кривцов А. М., Шеховцов В. В. Сетевое планирование и управление. М., Экономика, 1969.

30. Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления. М., Экономика, 1967.

31. Параубек Г. Э. Сетевое планирование и управление. М., Экономика, 1967.

32. Разумов И. М., Белова Л. Д. и др. Сетевые графики в планировании. М., Высшая школа, 1975.

33. Роберт В. Миллер. ПЕРТ — система управления. М., Экономика, 1965.

34. Системы сетевого планирования и управления (Программированное ведение в ПЕРТ). М., Мир, 1965.

В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

35. Авондо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов. М., Прогресс, 1966.

36. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. Потоковые алгоритмы. М., Наука, 1975.

37. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 2—7; гл. 7.

38. Гасс С. Путешествие в страну линейного программирования (глава «Линейное попурри»). М., Мир, 1973.

39. Ларченко Е. Г. Вычислительная техника и экономико-математические методы в землеустройстве. М., Недра, 1973, гл. XIV, § 104.

40. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. М., Мир, 1966.

41. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., Мир, 1974, гл. 8, § 2, 3.

В ФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

42. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 23.

43. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. М., Высшая школа, 1974.

44. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М., Высшая школа, 1964.

45. Кононенко Ю. И. Применение теории ориентированных графов при расчете линейных электрических цепей. Киев, 1968.

46. Сешу С., Рид М. Линейные графы и электрические цепи. М., Высшая школа, 1971.

47. Сучилин А. М. Применение направленных графов к задачам электротехники. Л., Энергия, 1971.

В КИБЕРНЕТИКЕ, БИОЛОГИИ И НЕКОТОРЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ

48. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 15—20, 24.

49. Гаазе-Рапопорт М. Г. Автоматы и живые организмы. М., Физматгиз, 1962.

50. Гамов Г. Комбинаторные принципы в генетике. В сб.: Прикладная комбинаториая математика. М., Мир, 1968.
51. Мелихов А. Н. Ориентированные графы и конечные автоматы. М., Наука, 1971.
52. Росс Эшби У. Введение в кибернетику. М., ИЛ, 1959.
53. Цетлин М. Л. Исследование по теории автоматов и моделирование биологических систем. М., Наука, 1970.

В ХИМИИ

54. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 21—22.
55. Дмитриев И. С. Симметрия в мире молекул. М., Химия, 1976.

В СОЦИОЛОГИИ

56. Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962, гл. 11 и 14.
57. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 26.
58. Количественные методы в социологии. Сб. М., Наука, 1966, гл. IV.

В ПЕДАГОГИКЕ

59. Моргунов И. Б. Применение графов в разработке учебных планов и планировании учебного процесса. — Советская педагогика, 1966, № 3.
60. Овчинников А. А. и др. Сетевые методы планирования и организации учебного процесса. М., Высшая школа, 1972.
61. Папи Ф. и Папи Ж. Дети и графы. М., Педагогика, 1974.
62. Сохор А. М. Логическая структура учебного материала. М., Педагогика, 1974.

В ИГРАХ И ГОЛОВОЛОМКАХ

63. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, гл. 6, § 8 — 13.
64. Берж К. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962, гл. 5 и 6.
65. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., Мир, 1971.
66. Гарднер М. Математические досуги. М., Мир, 1972.
67. Гарднер М. Математические новеллы. М., Мир, 1973.
68. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, Наука, 1969, гл. 6, § 48.
69. Оре О. Графы и их применение. М., Мир, 1965, гл. VI и IX.

ПРОБЛЕМНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

70. Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, Наука, 1969, гл. 6, § 50.
71. Мудров В. И. Задача о коммивояжере. М., Знание, 1969.
72. Харари Ф. Комбинаторные задачи перечисления графов. — В сб.: Прикладная комбинаторная математика. М., Мир, 1968.
73. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М., Мир, 1977.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА I

1.5. Каждой вершине в полиом графе с n вершииами прииадлежит $n-1$ ребро, ио в произведеиии $n(n-1)$ каждое ребро учтеио дважды.

1.18. $3+2k$.

1.19. $m+4k$.

1.20. $m+(n-1)k$.

1.21. После каждого разрезаиия получается $4k+5$ листков.

1.22. Ящик, в который кладут m ящиков, не исчезает, как лист бумаги в предыдущих задачах. При каждой процедуре заполиеиия ящика число ящиков увеличивается на m (рис. 1). Всего ящиков $k(m+1)$.

1.23. Постройте соответствующий граф (рис. 2).

1.24. Нарисуйте соответствующий граф и считайте с иего ответ (рис. 3) $2\cdot2\cdot2=2^3=8$.

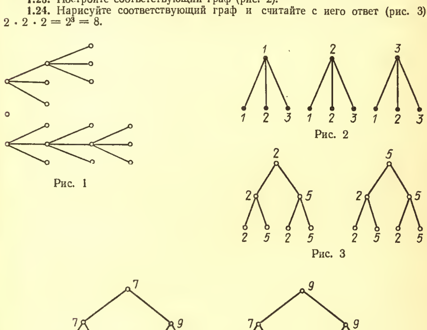


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

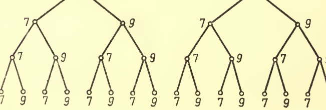


Рис. 4

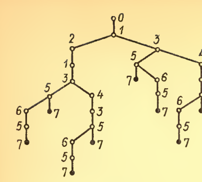


Рис. 5

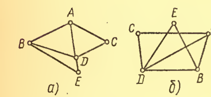


Рис. 6

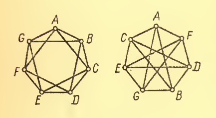


Рис. 7

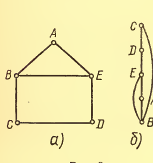


Рис. 8

1.25. Нарисуйте соответствующий граф и считайте с него ответ (рис. 4), то есть $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

1.26. Нет. В графе не может быть нечетного числа вершин нечетной степени.

1.28. См. доказательство теоремы 1.2.

1.29. Существует.

1.31. См. доказательство теоремы 1.3.

1.40. р = в.

1.41. р = в — 1.

1.54. Для дерева Г, с в = 1 теорема верна, р = в — 1. Предположим, что в дереве Г с в = n р = n — 1. Возьмем любое дерево с в = $n + 1$. Если выделить из него какое-нибудь дерево с n вершинами, то останется только одна из концевых вершин, иначе дерево распадется. Концевая вершина принадлежит только одному ребру, то есть в дереве с в = $n + 1$ р = $(n - 1) + 1 = n$. По принципу математической индукции теорема верна для дерева с любым числом вершин.

1.56. Всякое дерево с в вершинами имеет в — 1 ребро, то есть для получения дерева, содержащего все вершины графа, необходимо удалить р — (в — 1) ребер.

1.57. Любой граф, не являющийся связным.

1.58. Восемью способами. См. рис. 5.

1.59. Граф имеет 40 вершин и 66 ребер. Должно остаться дерево, содержащее все вершины графа; оно будет иметь 39 ребер. Удалить следует 27 ребер. Можно удалить, например, три ряда «горизонтальных» ребер.

1.61. 146.

1.62. 1) Имеют разное число вершин;

2) имеют разное число ребер;

3) на рисунке 1.52 (а) есть вершина степени 4, а на рисунке 1.52 (б) нет вершины степени 4;

4) на рисунке 1.52 (в) — граф связный, а на рисунке 1.52 (г) — несвязный.

1.63. 1) Оба рисунка соответствуют полному графу с пятью вершинами;

2) см. рисунок 6;

3) см. рисунок 7.

1.64. На рисунке 1.60 (а) существует вершина степени 2, которая соединена ребрами с вершиной степени

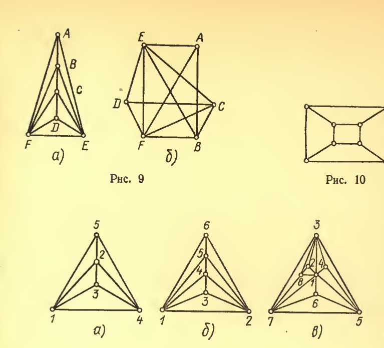


Рис. 9

Рис. 10

Рис. 11

3 и вершиной степени 2, а на рисунке 1.60 (б) все вершины степени 2 соединены ребрами только с вершинами степени 3.

1.65. 1) См. рис. 8;

2) см. рис. 9.

ГЛАВА II

2.1. Нарисуйте граф Г так, чтобы его ребра не имели других общих точек, кроме принадлежащих им вершин.

2.2. Не существует; все графы с четырьмя вершинами, в том числе и полный, плоские.

2.3. Этот граф плоский, его можно изобразить так, как показано на рисунке 10.

2.6. Верна; г = 1; в = р + 1; в — р + г = р + 1 — р + 1 = 2.

2.12. Заметим, что при добавлении одной вершины число граней увеличивается на 2. Формула верна для $n = 3$. Предположим, что формула верна при $n = k$. Докажем, что она верна для $n = k + 1$, т. е. что число граней в этом случае г = 2 ((k + 1) — 2) = 2k — 2. Добавим одну вершину (на конечную или бесконечную грань); число граней увеличится на 2, то есть г = 2 (k + 2) + 2 = 2k—2.

2.13. См. рис. 11.

2.21. В графе, соответствующем подземелью (рис. 12), вершины — комнаты, а ребра соединяют те вершины, которые соответствуют комнатам, связанным дверью; только две вершины нечетные: 6 (крайняя) и 18 (не крайняя). Существует эйлеров путь из 6 в 18. Сокровища в комнате 18.

2.24. Достаточно привести пример такого графа (рис. 13).

2.25. Любой граф, содержащий или эйлеров цикл, или эйлеров путь.

2.26. См. рис. 14.

2.27. См. рис. 15.

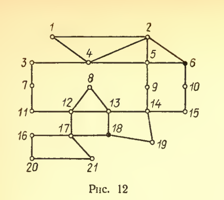


Рис. 12

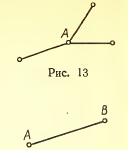


Рис. 13

Рис. 14

Рис. 15

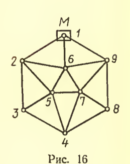


Рис. 16

2.35. а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 20, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 18, 14, 15, 16,
б) Два решения. 1) 1, 2, 12, 11, 10, 3, 4, 8, 9, 16, 15, 14, 13, 20, 19, 18, 17, 7, 6, 5 и 2) 1, 2, 12, 11, 10, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 17, 7, 8, 9, 16, 15, 14, 13, 20.

в) Два решения. 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 20, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 16, 15, 14, 18 и 2) 1, 2, 3, 10, 9, 16, 17, 7, 8, 4, 5, 6, 19, 20, 13, 11, 15, 14, 18.

2.36. 9, 8, 4, 5, 6, 7.

2.37. а) Э и Г;
б) не Э, Г;
в) Э, не Г;
г) не Э, не Г.

2.38. См. рис. 16.

2.39. (1, 2), (2, 5), (5, 4), (4, 3) (3, 1) и (1, 3) (3, 4) (4, 5) (5, 2) (2, 1).

ГЛАВА III

3.1. См. решение задачи 3.1.

3.3. Предположите противное и получите противоречие с условием: «В полном графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов, каждая из вершин которого соединена красными ребрами только с двумя другими, не существует треугольника с красными сторонами».

3.4. Каждому углу поставим в соответствие вершину графа. Если сумма двух углов больше 90°, то соответствующие вершины соединены красным ребром, если не больше 90°, то синим. Получим полный граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов. Остается доказать, что в таком графе всегда найдется хотя бы один треугольник с одноцветными сторонами.

3.5. Каждому делегату поставим в соответствие вершину графа. Пусть красное ребро означает, что два делегата могут объясниться на одном языке, а синее — что не могут. Если нет треугольника с красными сторонами, то по свойству 2 должен быть треугольник с синими сторонами. Но это противоречит условию. «В полном графе с шестью вершинами и ребрами 2 цветов, в любом треугольнике которого по меньшей мере одна сторона красная, найдется треугольник с красными сторонами».

3.6. Рассмотрим граф с девятью вершинами. Пусть красное ребро означает, что двое знакомы между собой, синее — не знакомы. Если бы каждый был знаком ровно с тремя другими, то красных ребер было бы $\frac{9 \cdot 3}{2}$. Это число не целое. Следовательно, предположение неверное.

3.7. Имеем граф (не обязательно полный) с ребрами двух цветов. Берем любую особую вершину и перекрашиваем ребра. При этом число красных ребер уменьшается, новые особые точки не появляются. Повторяем операцию до тех пор, пока в графе не исчезнут все особые точки. Процесс этот конечен, так как число ребер в графе конечно.

3.9. Пусть хотя бы одна вершина A данного графа принадлежит четырем красным ребрам (A, B), (A, C), (A, D) и (A, E). Хотя бы одна пара из вершин B, C, D и E соединена красным ребром, так как иначе появился бы четырехугольник с синими сторонами и синими диагоналями. Рассмотрим остальные случаи, то есть такие, в которых все вершины имеют красную степень меньше четырех. Графа с 9 вершинами, в котором каждая вершина имеет красную степень, равную 3, не существует (см. упр. 3, 6). Остается рассмотреть случай, когда в графе существует вершина, красная степень которой < 3, а синяя степень $\geqslant 6$. Среди 6 вершин — противоположных концов этих синих ребер — всегда найдется треугольник с одноцветными сторонами. Стороны его красные, так как иначе появился бы четырехугольник с синими сторонами и синими диагоналями. Итак, во всех случаях существует треугольник с красными сторонами.

3.10. Достаточно доказать, что в полном графе с 18 вершинами и ребрами двух цветов всегда существует четырехугольник, стороны и диагонали которого одного цвета. Из 17 ребер, принадлежащих каждой вершине, по меньшей мере 9 одного цвета. Берем любую вершину A, пусть она принадлежит девяти красным ребрам. Противоположные концы этих ребер и ребра, соединяющие их попарно, образуют полный граф с 9 вершинами и ребрами двух цветов. Если в этом графе содержится синий четырехугольник с синими диагоналями, то он искомый. В противном случае должен найтись треугольник с красными сторонами (см. упр. 3.8). Вершина A и красные ребра, выходящие из A, дополняют этот треугольник до четырехугольника с диагоналями.

3.11. Каждому государству поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что два государства установили дипсвязи, красное — не установили. Условием допускаются только треугольники трех видов: 1) с тремя красными сторонами; 2) с двумя красными сторонами и одной синей; 3) с одной красной стороной и двумя синими. Наибольшее число посольств было бы, если существовал такой полный граф с двадцатью вершинами, в котором каждый треугольник имел в точности два синих ребра. Определим число синих ребер в этом случае. Выберем для этого какие-нибудь две вершины A и B, соединенные синим ребром. Любая из остальных восемнадцати вершин соединена синим ребром либо с A, либо с C. Вершины A и B исключим из рассмотрения, а с оставшимися 18 вершинами проведем аналогичное рассуждение. В итоге получим 100 синих ребер, так как $19 + 17 + 15 + \ldots 3 + 1 = 100$, что соответствует двумстам посольствам. Но в графе, соответствующем условию задачи, всегда найдется треугольник с красными сторонами (докажите это), то есть число синих ребер меньше ста.

3.12. Воспользуемся методом математической индукции.

1. При $n = 1$ $a_1 = 2$. Число вершин $a_1 + 1 = 3$.

Граф является треугольником с ребрами одного цвета (то есть искомым треугольником).

2. Пусть при $n = k$ утверждение верно, то есть в графе с числом цветов k и числом вершин $a_k + 1$ существует треугольник с одноцветными сторонами. Пусть теперь $n = k + 1$. Тогда число вершин равно $a_{k+1} + 1 = ((k + 1) \cdot a_k + 1) + 1$.

Выберем одну из вершин; назовем ее A. Она соединяется ребрами $k + 1$ цвета с вершинами, число которых $(k + 1) \cdot a_k + 1$. Среди этих ребер по крайней мере $a_k + 1$ одного цвета (докажите), для определенности синего. Если одна из $a_k + 1$ вершин B связана с другой C синим ребром, то треугольник ABC — искомый. Если же нет, синий цвет вовсе не использован в графе, состоящем из $a_k + 1$ вершины, и тогда там использованы только k цветов. В этом графе (являющемся частью исходного) по предположению имеется искомый треугольник, а значит, он имеется и в исходном.

Утверждение доказано.

В частности, при $n = 2$ (два цвета) $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $a_2 + 1 = 6$ (шесть вершин); при $n = 3$ (три цвета) $a_3 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$, $a_3 + 1 = 17$ (семнадцать вершин).

(Во всех упражнениях 3.1—3.12 имеются в виду полные графы.)

ГЛАВА IV

4.5. По условию существует путь от A к B и от B к C. Следуя этим путем из A в C, достаточно пройти $S(AB) + S(BC)$ ребер. По определению $S(AC)$ есть наименьшее число ребер, по которым можно попасть из A в C, поэтому $S(AC) \leqslant S(AB) + S(BC)$ (рис. 17).

ГЛАВА V

5.19. а) Обладает; б) не обладает.
5.31. а) Штриховых 9; сплошных 6.
б) Штриховых 10; сплошных 6.
5.46. а) Строгий неполный порядок;
б) нестрогий полный порядок;
в) строгий полный порядок;
г) нестрогий неполный порядок.

ГЛАВА VII

7.14. На рисунке 7.14 (б).
7.15. На рисунке 7.15 (б).
7.16. На рисунке 7.16 (а).
7.17. 1. Кроме исходного события, есть вершина 2, в которую не входит ни одна стрелка.
2. Из вершины 10 не выходит ни одна стрелка.
3. Есть цикл: 4, 6, 8, 11, 9, 4.
7.18. 1) См. рис. 18. 2) См. рис. 19. 3) См. рис. 20.
7.19. 1) См. рис. 21. 2) См. рис. 22. 3) См. рис. 23.
7.20. 1) См. рис. 24. 2) См. рис. 25.
7.21. См. рис. 26.
7.22. См. рис. 27.
7.26. а) $L_{кр.}$: 0, 1, 3, 4, 6. $t_{р.}(6) = 16$; $t_{р.}(3) = 11$; $t_{р.}(5) = 11$.
б) $L_{кр.}$: 0, 2, 3, 6. $t_{р.}(3) = 5$; $t_{р.}(5) = 9$; $t_{р.}(6) = 11$.
в) $L_{кр.}$: 0, 1, 4, 5, 7, 8, 10. $t_{р.}(10) = 19$; $t_{р.}(3) = 3$; $t_{р.}(5) = 10$; $t_{р.}(6) = 8$.
г) Критический путь проходит через вершины: 0, 3, 2, 6, 8, 9, 10. $t_{р.}(10)=61$; $t_{р.}(3) = 13$; $t_{р.}(5) = 37$; $t_{р.}(6) = 29$.
7.27. Критический путь проходит через вершины: 0, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10. $t_{р.}(10) = 24$.
7.28. Критический путь проходит через вершины: 0, 3, 4, 9, 10. $t_{р.}(10) = 21$.
7.33. а) $t_{р.}(1) = 7$; $t_{р.}(2) = 9$; $t_{р.}(3) = 15$; $t_{р.}(4) = 18$;

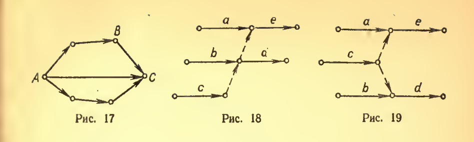


Рис. 17 Рис. 18 Рис. 19

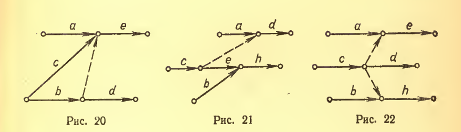


Рис. 20 Рис. 21 Рис. 22

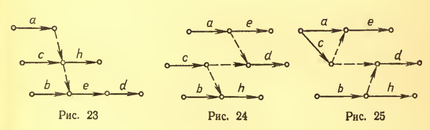


Рис. 23 Рис. 24 Рис. 25

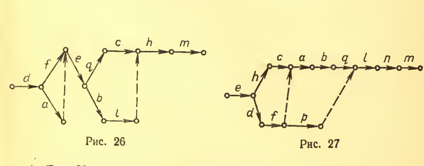


Рис. 26 Рис. 27

$t_{р.}(5) = 26$; $t_{р.}(6) = 34$; $t_{р.}(7) = 28$; $t_{р.}(8) = 40$.
б) Критический путь проходит через события: 0; 2; 4; 6; 7; 9.
в) $t_{п.}(1) = 7$; $t_{п.}(2) = 12$; $t_{п.}(3) = 15$; $t_{п.}(4) = 21$;
$t_{п.}(5) = 26$; $t_{п.}(6) = 34$; $t_{п.}(7) = 29$; $t_{п.}(8) = 40$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VI. Деревья в работе

Глава VII. Сетевое планирование и управление

Глава VIII. Графы и матрицы

Лариса Юрьевна Березина

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Пособие для учителей

Редактор Ж. П. Данилова
Обложка художника Б. Л. Николаева
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор И. В. Квасницкая
Корректор О. В. Ивашкина

ИБ № 3914

Сдано в набор 29.11.78. Подписано к печати 19.04.79. $60\times90^1/_{16}$. Бум. тип. № 2. Гарн. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 9. Уч.-изд. л. 9.05. Тираж 110 000 экз. Заказ 870. Цена 25 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.



25 к.

